

– Typeset by GMNI & Foil_ETEX –

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE AUTOVALORES

F. Navarrina, I. Colominas, H. Gómez, J. París, M. Casteleiro



GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fnavarrina@udc.es

página web: <http://caminos.udc.es/gmni>





ÍNDICE

▶ Problema Estándar y Problema Generalizado

▶ TÉCNICAS AUXILIARES

- Reducción de Autovalores
- Traslación de Autovalores
- Inversión de Autovalores
- Cociente de Rayleigh
- Análisis de Rayleigh-Ritz

▶ MÉTODO DE MISES

- Fundamentación Teórica
- Programación
- Variantes

▶ MÉTODO DE JACOBI

- Fundamentación Teórica

▶ CLASIFICACIÓN DE MÉTODOS





Problema Estándar y Problema Generalizado (I)

PROBLEMA ESTÁNDAR

[\underline{A} real simétrica] (*)

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} \bar{u}_i &= \lambda_i \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1, \dots, n.$$



$$\left. \begin{aligned} \underline{A} \underline{U} &= \underline{U} \underline{\Lambda} \\ \underline{U}^T \underline{U} &= \underline{I} \end{aligned} \right\} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{U} &= [\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \dots \quad \bar{u}_n], \\ \underline{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \right. \quad (**)$$

(*) Si \underline{A} es DEF+ $\rightarrow 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Si \underline{A} es SemiDEF+ $\rightarrow 0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

(**) Luego: $\underline{U}^T \underline{A} \underline{U} = \underline{\Lambda}$.





Problema Estándar y Problema Generalizado (II)

PROBLEMA GENERALIZADO

[\underline{K} y \underline{M} reales simétricas, \underline{M} DEF+] (*)

$$\left. \begin{aligned} \underline{K} \bar{u}_i &= \lambda_i \underline{M} \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underline{M} \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1, \dots, n.$$



$$\left. \begin{aligned} \underline{K} \underline{U} &= \underline{M} \underline{U} \underline{\Lambda} \\ \underline{U}^T \underline{M} \underline{U} &= \underline{I} \end{aligned} \right\} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{U} &= [\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \dots \quad \bar{u}_n], \\ \underline{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \right. \quad (**)$$

(*) Si \underline{K} es DEF+ $\rightarrow 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Si \underline{K} es SemiDEF+ $\rightarrow 0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

(**) Luego: $\underline{U}^T \underline{K} \underline{U} = \underline{\Lambda}$.





Problema Estándar y Problema Generalizado (IIIa)

Equivalencia Prob. Estándar – Prob. Generalizado

Sea el problema

$$\underline{\underline{K}} \bar{u} = \lambda \underline{\underline{M}} \bar{u}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underline{\underline{K}} & \text{real, simétrica,} \\ \underline{\underline{M}} & \text{real, simétrica, DEF+.} \end{cases}$$

Siempre se puede factorizar

$$\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{L}}^T. \quad (*)$$

(*) Factorización de Cholesky (2.º parcial).





Problema Estándar y Problema Generalizado (IIIb)

Luego

$$\underline{K} \bar{u} = \lambda \underline{M} \bar{u} = \lambda \underline{L} \underline{L}^T \bar{u} \iff \underline{L}^{-1} \underline{K} \bar{u} = \lambda \underline{L}^T \bar{u}$$



$$\underbrace{\underline{L}^{-1} \underline{K} \underline{L}^{-T}}_{\hat{K}} \underbrace{\underline{L}^T \bar{u}}_{\hat{u}} = \lambda \underbrace{\underline{L}^T \bar{u}}_{\hat{u}}$$



$$\hat{K} \hat{u} = \lambda \hat{u}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \hat{K} = \underline{L}^{-1} \underline{K} \underline{L}^{-T}, \\ \hat{u} = \underline{L}^T \bar{u}. \end{cases} \quad (*)$$

(*) Si \underline{K} es real, simétrica $\longrightarrow \hat{K}$ real, simétrica.

Si \underline{K} es real, simétrica y semiDEF+ / DEF+ $\longrightarrow \hat{K}$ real, simétrica y semiDEF+ / DEF+.





Problema Estándar y Problema Generalizado (IIc)

Por tanto,

$$\left. \begin{aligned} \hat{\underline{K}} \hat{u}_i &= \lambda_i \hat{u}_i \\ \hat{u}_i^T \hat{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1 \dots, n,$$

y definiendo

$$\bar{u}_i = \underline{L}^{-T} \hat{u}_i \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{u}_i = \underline{L}^T \bar{u}_i$$

obtenemos

$$\left. \begin{aligned} \hat{\underline{K}} (\underline{L}^T \bar{u}_i) &= \lambda_i (\underline{L}^T \bar{u}_i) \\ (\underline{L}^T \bar{u}_i)^T (\underline{L}^T \bar{u}_j) &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1 \dots, n.$$



Problema Estándar y Problema Generalizado (IIId)

En consecuencia,

$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{L}} \widehat{\underline{\underline{K}}} \underline{\underline{L}}^T \bar{u}_i &= \lambda_i \underline{\underline{L}} \underline{\underline{L}}^T \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underline{\underline{L}} \underline{\underline{L}}^T \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1 \dots, n,$$



$$\left. \begin{aligned} \underline{\underline{K}} \bar{u}_i &= \lambda_i \underline{\underline{M}} \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underline{\underline{M}} \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1 \dots, n.$$



TÉCNICAS AUXILIARES: Reducción de Autovalores (Ia)

PROBLEMA ESTÁNDAR

[\underline{A} real simétrica]

Sea el problema

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} \bar{u}_i &= \lambda_i \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1 \dots, n.$$

Se pretende “reducir” (*) el autovalor λ_k . Para ello se define

$$\underline{A}' = \underline{A} - \lambda_k \begin{bmatrix} \bar{u}_k & \bar{u}_k^T \end{bmatrix} \implies \underline{A}' \bar{u}_i = \begin{cases} \lambda_i \bar{u}_i, & \text{si } i \neq k, \\ 0 \bar{u}_i, & \text{si } i = k. \end{cases}$$

(*) Convertir el autovalor λ_k en 0, sin modificar los restantes autovalores ni los autovectores.





TÉCNICAS AUXILIARES: Reducción de Autovalores (Ib)

Pues

$$\begin{aligned}\underline{A}' \bar{u}_i &= \left(\underline{A} - \lambda_k [\bar{u}_k \bar{u}_k^T] \right) \bar{u}_i \\ &= \underline{A} \bar{u}_i - \lambda_k [\bar{u}_k \bar{u}_k^T] \bar{u}_i \\ &= \lambda_i \bar{u}_i - \lambda_k \bar{u}_k (\bar{u}_k^T \bar{u}_i) \\ &= \lambda_i \bar{u}_i - \lambda_k \bar{u}_k \delta_{ki} \\ &= \begin{cases} \lambda_i \bar{u}_i, & \text{si } i \neq k \\ 0 \bar{u}_i, & \text{si } i = k \end{cases}\end{aligned}$$





TÉCNICAS AUXILIARES: Reducción de Autovalores (IIa)

PROBLEMA GENERALIZADO

[\underline{K} y \underline{M} reales simétricas, \underline{M} DEF+]

Sea el problema

$$\left. \begin{aligned} \underline{K} \bar{u}_i &= \lambda_i \underline{M} \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underline{M} \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1 \dots, n.$$

Se pretende “reducir” (*) el autovalor λ_k . Para ello se define

$$\left. \begin{aligned} \underline{K}' &= \underline{K} - \lambda_k \left[(\underline{M} \bar{u}_k) (\underline{M} \bar{u}_k)^T \right] \\ \underline{M}' &= \underline{M} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{K}' \bar{u}_i = \begin{cases} \lambda_i \underline{M}' \bar{u}_i, & \text{si } i \neq k, \\ 0 \underline{M}' \bar{u}_i, & \text{si } i = k. \end{cases}$$

(*) Convertir el autovalor λ_k en 0, sin modificar los restantes autovalores ni los autovectores.





TÉCNICAS AUXILIARES: Reducción de Autovalores (IIb)

Pues

$$\begin{aligned}\underline{K}' \bar{u}_i &= \left(\underline{K} - \lambda_k \left[(\underline{M} \bar{u}_k) (\underline{M} \bar{u}_k)^T \right] \right) \bar{u}_i \\ &= \underline{K} \bar{u}_i - \lambda_k \left[(\underline{M} \bar{u}_k) (\underline{M} \bar{u}_k)^T \right] \bar{u}_i \\ &= \lambda_i \underline{M} \bar{u}_i - \lambda_k (\underline{M} \bar{u}_k) (\bar{u}_k^T \underline{M} \bar{u}_i) \\ &= \lambda_i \underline{M} \bar{u}_i - \lambda_k (\underline{M} \bar{u}_k) \delta_{ki} \\ &= \begin{cases} \lambda_i \underline{M}' \bar{u}_i, & \text{si } i \neq k \\ 0 \underline{M}' \bar{u}_i, & \text{si } i = k \end{cases}\end{aligned}$$





TÉCNICAS AUXILIARES: Reducción de Autovalores (IIIa)

Obtención de la expresión para el Prob. Generalizado

Se sabe que dado el problema

$$\underline{K} \bar{u} = \lambda \underline{M} \bar{u}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underline{K} & \text{real, simétrica,} \\ \underline{M} & \text{real, simétrica, DEF+,} \end{cases}$$

siempre se puede factorizar $\underline{M} = \underline{L} \underline{L}^T$.

Luego

$$\underline{K} \bar{u} = \lambda \underline{M} \bar{u} \iff \hat{K} \hat{u} = \lambda \hat{u}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \hat{K} = \underline{L}^{-1} \underline{K} \underline{L}^{-T}, \\ \hat{u} = \underline{L}^T \bar{u}. \end{cases}$$

Dado el autovector \bar{u}_i del problema generalizado, su correspondiente del problema estándar equivalente será $\hat{u}_i = \underline{L}^T \bar{u}_i$ y se verificará $\hat{K} \hat{u}_i = \lambda_i \hat{u}_i$.





TÉCNICAS AUXILIARES: Reducción de Autovalores (IIIb)

Para “reducir” el autovalor λ_k de este problema, se define

$$\underline{\hat{K}}' = \underline{\hat{K}} - \lambda_k \begin{bmatrix} \hat{u}_k & \hat{u}_k^T \end{bmatrix} \implies \underline{\hat{K}}' \hat{u}_i = \begin{cases} \lambda_i \hat{u}_i, & \text{si } i \neq k, \\ 0 \hat{u}_i, & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Pero

$$\begin{aligned} \underline{\hat{K}}' \hat{u} &= \lambda \hat{u} && \iff && \left[\underline{\hat{K}} - \lambda_k \begin{bmatrix} \hat{u}_k & \hat{u}_k^T \end{bmatrix} \right] \hat{u} = \lambda \hat{u} \\ &&& \iff && \left[\underline{L}^{-1} \underline{\hat{K}} \underline{L}^{-T} - \lambda_k \left(\underline{L}^T \bar{u}_k \right) \left(\underline{L}^T \bar{u}_k \right)^T \right] \left(\underline{L}^T \bar{u} \right) = \lambda \left(\underline{L}^T \bar{u} \right) \\ &&& \iff && \underline{L} \left[\underline{L}^{-1} \underline{\hat{K}} \underline{L}^{-T} - \lambda_k \left(\underline{L}^T \bar{u}_k \right) \left(\underline{L}^T \bar{u}_k \right)^T \right] \left(\underline{L}^T \bar{u} \right) = \lambda \underline{L} \left(\underline{L}^T \bar{u} \right) \\ &&& \iff && \underbrace{\left[\underline{K} - \lambda_k \left(\underline{M}^T \bar{u}_k \right) \left(\underline{M}^T \bar{u}_k \right)^T \right]}_{\underline{K}'} \bar{u} = \lambda \underline{M} \bar{u}. \end{aligned}$$





TÉCNICAS AUXILIARES: Traslación de Autovalores (Ia)

PROBLEMA ESTÁNDAR

[\underline{A} real simétrica]

Sea el problema

$$\left. \begin{array}{l} \underline{A} \bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \bar{u}_j = \delta_{ij} \end{array} \right\} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Se pretende “trasladar” (*) los autovalores λ_i una distancia ρ . Para ello se define

$$\underline{A}' = \underline{A} + \rho \underline{I} \quad \Longrightarrow \quad \underline{A}' \bar{u}_i = (\lambda_i + \rho) \bar{u}_i.$$

(*) Convertir cada autovalor λ_i en $(\lambda_i + \rho)$, sin modificar su correspondiente autovector.





TÉCNICAS AUXILIARES: Traslación de Autovalores (Ib)

Pues

$$\begin{aligned}\underline{A}' \bar{u}_i &= (\underline{A} + \rho \underline{I}) \bar{u}_i \\ &= \underline{A} \bar{u}_i + \rho \underline{I} \bar{u}_i \\ &= \lambda_i \bar{u}_i + \rho \bar{u}_i \\ &= (\lambda_i + \rho) \bar{u}_i.\end{aligned}$$



TÉCNICAS AUXILIARES: Traslación de Autovalores (IIa)

PROBLEMA GENERALIZADO

[\underline{K} y \underline{M} reales simétricas, \underline{M} DEF+]

Sea el problema

$$\left. \begin{aligned} \underline{K} \bar{u}_i &= \lambda_i \underline{M} \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underline{M} \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Se pretende “trasladar” (*) los autovalores λ_i una distancia ρ . Para ello se define

$$\left. \begin{aligned} \underline{K}' &= \underline{K} + \rho \underline{M} \\ \underline{M}' &= \underline{M} \end{aligned} \right\} \implies \underline{K}' \bar{u}_i = (\lambda_i + \rho) \underline{M}' \bar{u}_i.$$

(*) Convertir cada autovalor λ_i en $(\lambda_i + \rho)$, sin modificar su correspondiente autovector.





TÉCNICAS AUXILIARES: Traslación de Autovalores (IIb)

Pues

$$\begin{aligned}\underline{K}' \bar{u}_i &= (\underline{K} + \rho \underline{M}) \bar{u}_i \\ &= \underline{K} \bar{u}_i + \rho \underline{M} \bar{u}_i \\ &= \lambda_i \underline{M} \bar{u}_i + \rho \underline{M} \bar{u}_i \\ &= (\lambda_i + \rho) \underline{M} \bar{u}_i.\end{aligned}$$





TÉCNICAS AUXILIARES: Inversión de Autovalores (Ia)

PROBLEMA ESTÁNDAR

[\underline{A} real simétrica, no-singular]

Sea el problema

$$\left. \begin{array}{l} \underline{A} \bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \bar{u}_j = \delta_{ij} \end{array} \right\} \quad i, j = 1 \dots, n.$$

Se pretende “invertir” (*) los autovalores λ_i . Para ello se define

$$\underline{A}' = \underline{A}^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \underline{A}' \bar{u}_i = (\lambda_i)^{-1} \bar{u}_i.$$

(*) Convertir cada autovalor λ_i en $(\lambda_i)^{-1}$, sin modificar su correspondiente autovector.





TÉCNICAS AUXILIARES: Inversión de Autovalores (Ib)

Pues

$$\underline{A} \bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i, \quad \det(\underline{A} \neq 0) \implies \lambda_i \neq 0$$



$$\underline{A}^{-1} \underline{A} \bar{u}_i = \lambda_i \underline{A}^{-1} \bar{u}_i$$



$$\bar{u}_i = \lambda_i \underline{A}^{-1} \bar{u}_i$$



$$(\lambda_i)^{-1} \bar{u}_i = \underline{A}^{-1} \bar{u}_i.$$





TÉCNICAS AUXILIARES: Inversión de Autovalores (IIa)

PROBLEMA GENERALIZADO [\underline{K} y \underline{M} reales simétricas, \underline{K} no singular, \underline{M} DEF+]

Sea el problema

$$\left. \begin{aligned} \underline{K} \bar{u}_i &= \lambda_i \underline{M} \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underline{M} \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1 \dots, n.$$

Se pretende “invertir” (*) los autovalores λ_i . Para ello se define

$$\left. \begin{aligned} \underline{K}' &= \underline{M} \\ \underline{M}' &= \underline{K} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{K}' \bar{u}_i = (\lambda_i)^{-1} \underline{M}' \bar{u}_i.$$

(*) Convertir cada autovalor λ_i en $(\lambda_i)^{-1}$, sin modificar su correspondiente autovector.





TÉCNICAS AUXILIARES: Inversión de Autovalores (IIb)

Pues

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K}} \bar{u}_i &= \lambda_i \underline{\underline{M}} \bar{u}_i, & \det(\underline{\underline{K}} \neq 0) &\implies \lambda_i \neq 0 \\ & & \Updownarrow & \\ & & (\lambda_i)^{-1} \underline{\underline{K}} \bar{u}_i &= \underline{\underline{M}} \bar{u}_i. \end{aligned}$$



TÉCNICAS AUXILIARES: Cociente de Rayleigh (λ)

PROBLEMA ESTÁNDAR

[\underline{A} real simétrica]

Sea el problema

$$\left. \begin{array}{l} \underline{A} \bar{u}_i = \lambda_i \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \bar{u}_j = \delta_{ij} \end{array} \right\} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Se define el **COCIENTE DE RAYLEIGH** $\rho(\bar{v})$ de un vector cualquiera \bar{v} como

$$\rho(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^T \underline{A} \bar{v}}{\bar{v}^T \bar{v}}.$$

En lo sucesivo supondremos que los autovalores λ_i se ordenan de forma que

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$





PROPIEDADES DEL COCIENTE DE RAYLEIGH

1. RANGO:

$$\lambda_1 \leq \rho(\bar{v}) \leq \lambda_n \quad \forall \bar{v}.$$

2. IDENTIFICACIÓN DE AUTOVALORES:

$$\bar{v} = \alpha \bar{u}_i \quad \Longrightarrow \quad \rho(\bar{v}) = \lambda_i.$$

3. APROXIMACIÓN DE AUTOVALORES:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{v} = \alpha \bar{u}_i + \varepsilon \bar{x}, \\ \text{con } \bar{x}^T \bar{x} = 1, \bar{x}^T \bar{u}_i = 0, \end{array} \right\} \Longrightarrow \rho(\bar{v}) = \lambda_i + \mathcal{O}((\varepsilon/\alpha)^2).$$



TÉCNICAS AUXILIARES: Cociente de Rayleigh (Ib2)

4. CARACTERIZACIÓN MINI-MAX:

$$\lambda_r = \max_{\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_{r-1}\}} \left\{ \min_{\bar{v}} (\rho(\bar{v}) \mid \bar{v}^T \bar{w}_k = 0 \text{ para } k = 1, \dots, r-1) \right\}.$$

5. SEPARACIÓN DE AUTOVECTORES:

Sean las submatrices principales $\underline{A}_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$, $k = 1, \dots, n$.

Definimos los problemas

$$\underline{A}_k \bar{u}_i^k = \lambda_i^k \bar{u}_i^k \text{ con } \left(\bar{u}_i^k \right)^T \bar{u}_j^k = \delta_{ij}, \text{ para } i, j = 1, \dots, k.$$

En estas condiciones, los autovalores λ_i^k verifican

$$\lambda_1^{k+1} \leq \lambda_1^k \leq \lambda_2^{k+1} \leq \lambda_2^k \leq \dots \leq \lambda_{k-1}^k \leq \lambda_k^{k+1} \leq \lambda_k^k \leq \lambda_{k+1}^{k+1},$$

que es lo que se denomina una **secuencia de STURM**.





TÉCNICAS AUXILIARES: Cociente de Rayleigh (Ic1)

Demostración de las propiedades del Cociente de Rayleigh

1. Rango

Los autovectores forman una base. Por tanto, cualquier vector \bar{v} puede escribirse

en la forma $\bar{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{u}_i$. Luego

$$\rho(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^T A \bar{v}}{\bar{v}^T \bar{v}} = \frac{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{u}_i \right)^T A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{u}_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{u}_i \right)^T \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{u}_i \right)} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \left(\bar{u}_i^T A \bar{u}_j \right)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \left(\bar{u}_i^T \bar{u}_j \right)}$$

Pero $\bar{u}_i^T A \bar{u}_j = \bar{u}_i^T (\lambda_j \bar{u}_j) = \lambda_j \delta_{ij}$. Por tanto,

$$\rho(\bar{v}) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_j \delta_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \delta_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \left\{ \begin{array}{l} \geq \frac{\alpha_1^2 \lambda_1 + \alpha_2^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_n^2 \lambda_1}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2} = \lambda_1, \\ \leq \frac{\alpha_1^2 \lambda_n + \alpha_2^2 \lambda_n + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2} = \lambda_n. \end{array} \right.$$





Demostración de las propiedades del Cociente de Rayleigh

2. Identificación de autovalores

Si $\bar{v} = \alpha \bar{u}_i$ entonces

$$\rho(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^T \underline{A} \bar{v}}{\bar{v}^T \bar{v}} = \frac{(\alpha \bar{u}_i)^T \underline{A} (\alpha \bar{u}_i)}{(\alpha \bar{u}_i)^T (\alpha \bar{u}_i)} = \frac{\alpha^2 (\bar{u}_i^T \underline{A} \bar{u}_i)}{\alpha^2 (\bar{u}_i^T \bar{u}_i)} = \frac{\bar{u}_i^T \underline{A} \bar{u}_i}{\bar{u}_i^T \bar{u}_i}$$

Pero $\bar{u}_i^T \underline{A} \bar{u}_i = \bar{u}_i^T (\lambda_i \bar{u}_i) = \lambda_i$. Por tanto

$$\rho(\bar{v}) = \lambda_i.$$



Demostración de las propiedades del Cociente de Rayleigh

3. Aproximación de autovalores

Si $\bar{v} = \alpha \bar{u}_i + \varepsilon \bar{x}$ entonces

$$\begin{aligned}\rho(\bar{v}) &= \frac{\bar{v}^T \underline{A} \bar{v}}{\bar{v}^T \bar{v}} = \frac{(\alpha \bar{u}_i + \varepsilon \bar{x})^T \underline{A} (\alpha \bar{u}_i + \varepsilon \bar{x})}{(\alpha \bar{u}_i + \varepsilon \bar{x})^T (\alpha \bar{u}_i + \varepsilon \bar{x})} \\ &= \frac{\alpha^2 (\bar{u}_i^T \underline{A} \bar{u}_i) + \varepsilon^2 (\bar{x}^T \underline{A} \bar{x}) + 2\alpha\varepsilon (\bar{x}^T \underline{A} \bar{u}_i)}{\alpha^2 (\bar{u}_i^T \bar{u}_i) + \varepsilon^2 (\bar{x}^T \bar{x}) + 2\alpha\varepsilon (\bar{x}^T \bar{u}_i)}.\end{aligned}$$

Pero \bar{u}_i y \bar{x} son vectores unitarios y ortogonales entre sí.

Luego $\bar{u}_i^T \underline{A} \bar{u}_i = \rho(\bar{u}_i)$, $\bar{x}^T \underline{A} \bar{x} = \rho(\bar{x})$, y $\bar{x}^T \underline{A} \bar{u}_i = \lambda_i (\bar{x}^T \bar{u}_i) = 0$.

Por tanto

$$\begin{aligned}\rho(\bar{v}) &= \frac{\alpha^2 \rho(\bar{u}_i) + \varepsilon^2 \rho(\bar{x})}{\alpha^2 + \varepsilon^2} = \frac{\lambda_i + (\varepsilon/\alpha)^2 \rho(\bar{x})}{1 + (\varepsilon/\alpha)^2} \\ &= [\lambda_i + (\varepsilon/\alpha)^2 \rho(\bar{x})] [1 - (\varepsilon/\alpha)^2 + (\varepsilon/\alpha)^4 - (\varepsilon/\alpha)^8 \dots] \\ &= \lambda_i + (\varepsilon/\alpha)^2 [\rho(\bar{x}) - \lambda_i] + \mathcal{O}((\varepsilon/\alpha)^4) = \lambda_i + \mathcal{O}((\varepsilon/\alpha)^2).\end{aligned}$$



TÉCNICAS AUXILIARES: Cociente de Rayleigh (II)

PROBLEMA GENERALIZADO

[\underline{K} y \underline{M} reales simétricas, \underline{M} DEF+]

Sea el problema

$$\left. \begin{aligned} \underline{K} \bar{u}_i &= \lambda_i \underline{M} \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underline{M} \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1 \dots, n.$$

Se define el **COCIENTE DE RAYLEIGH** $\rho(\bar{v})$ de un vector cualquiera \bar{v} como

$$\rho(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^T \underline{K} \bar{v}}{\bar{v}^T \underline{M} \bar{v}},$$

con idénticas propiedades a las expuestas en el caso del problema estándar.



TÉCNICAS AUXILIARES: Cociente de Rayleigh (IIIa)

Obtención de la expresión para el Prob. Generalizado

Se sabe que dado el problema

$$\underline{K} \bar{u} = \lambda \underline{M} \bar{u}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underline{K} & \text{real, simétrica,} \\ \underline{M} & \text{real, simétrica, DEF+,} \end{cases}$$

siempre se puede factorizar $\underline{M} = \underline{L} \underline{L}^T$.

Luego

$$\underline{K} \bar{u} = \lambda \underline{M} \bar{u} \iff \hat{\underline{K}} \hat{u} = \lambda \hat{u}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \hat{\underline{K}} = \underline{L}^{-1} \underline{K} \underline{L}^{-T}, \\ \hat{u} = \underline{L}^T \bar{u}. \end{cases}$$





TÉCNICAS AUXILIARES: Cociente de Rayleigh (IIIb)

Dado el vector \bar{v} del problema generalizado, su correspondiente del problema estándar equivalente será $\hat{v} = \underline{\underline{L}}^T \bar{v}$, cuyo cociente de Rayleigh será

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(\hat{v}) &= \frac{\hat{v}^T \hat{K} \hat{v}}{\hat{v}^T \hat{v}} \\ &= \frac{(\underline{\underline{L}}^T \bar{v})^T [\underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{L}}^{-T}] (\underline{\underline{L}}^T \bar{v})}{(\underline{\underline{L}}^T \bar{v})^T (\underline{\underline{L}}^T \bar{v})} \\ &= \frac{\bar{v}^T (\underline{\underline{L}} \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{L}}^{-T} \underline{\underline{L}}^T) \bar{v}}{\bar{v}^T (\underline{\underline{L}} \underline{\underline{L}}^T) \bar{v}} \\ &= \frac{\bar{v}^T \underline{\underline{K}} \bar{v}}{\bar{v}^T \underline{\underline{M}} \bar{v}} = \rho(\bar{v})\end{aligned}$$





TÉCNICAS AUXILIARES: Análisis de Rayleigh-Ritz (Ia)

PROBLEMA GENERALIZADO [\underline{K} y \underline{M} reales simétricas, \underline{K} no singular, \underline{M} DEF+]

Sea el problema

$$\left. \begin{aligned} \underline{K} \bar{u}_i &= \lambda_i \underline{M} \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underline{M} \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Dados los q vectores linealmente independientes $\{\bar{\psi}_\ell\}_{\ell=1, \dots, q}$ (en general $q \ll n$), buscamos aproximaciones a los autovectores \bar{u}_i y a los autovalores λ_i del tipo

$$\bar{u}_i \approx \bar{u}^R = \sum_{\ell=1}^q \alpha_\ell \bar{\psi}_\ell = \underline{\Psi} \bar{\alpha}, \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{aligned} \underline{\Psi} &= [\bar{\psi}_1 : \bar{\psi}_2 : \dots : \bar{\psi}_q], \\ \bar{\alpha} &= \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_q \end{Bmatrix}. \end{aligned} \right.$$
$$\lambda_i \approx \lambda^R = \rho(\bar{u}^R)$$





TÉCNICAS AUXILIARES: Análisis de Rayleigh-Ritz (Ib)

Para ello, planteamos

$$\frac{d\rho(\bar{u}^R)}{d\alpha_k} = 0, \quad k = 1, \dots, q \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{d\rho(\bar{u}^R)}{d\bar{\alpha}} \right)^T = \bar{0},$$

lo que equivale a resolver el problema reducido (*)

$$\begin{array}{l} \underline{\underline{K}}^R = \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{K}} \underline{\underline{\Psi}} \\ \underline{\underline{M}}^R = \underline{\underline{\Psi}}^T \underline{\underline{M}} \underline{\underline{\Psi}} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{K}}^R \bar{\alpha} = \lambda^R \underline{\underline{M}}^R \bar{\alpha}.$$

(*) Nótese que las matrices reducidas $\underline{\underline{K}}^R$ y $\underline{\underline{M}}^R$ son de orden $q \ll n$.





TÉCNICAS AUXILIARES: Análisis de Rayleigh-Ritz (II)

El planteamiento anterior (en términos de la minimización del cociente de Rayleigh) se fundamenta en que...

1. El cociente de Rayleigh tiene un extremo en cada autovector:

$$\left. \left(\frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}} \right)^T \right|_{\bar{v}=\bar{u}_i} = \bar{0}.$$

2. El cálculo de extremos de $\rho(\bar{u}^R)$ equivale al problema reducido:

$$\left(\frac{d\rho(\bar{u}^R)}{d\bar{\alpha}} \right)^T = \bar{0} \quad \Longrightarrow \quad \underline{K}^R \bar{\alpha} = \lambda^R \underline{M}^R \bar{\alpha}.$$

3. Si el subespacio $\{\bar{u}^R\}$ contiene un autovector \bar{u}_i el análisis de Rayleigh-Ritz lo detecta:

$$\bar{u}_i = \underline{\Psi} \bar{\beta} \quad \Longrightarrow \quad \underline{K}^R \bar{\beta} = \lambda_i \underline{M}^R \bar{\beta}.$$





TÉCNICAS AUXILIARES: Análisis de Rayleigh-Ritz (IIa)

Demostraciones:

1. El cociente de Rayleigh tiene un extremo en cada autovector:

Pues

$$\begin{aligned}\rho(\bar{v}) = \frac{\bar{v}^T \underline{K} \bar{v}}{\bar{v}^T \underline{M} \bar{v}} &\implies \frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}} = \frac{2(\bar{v}^T \underline{K})(\bar{v}^T \underline{M} \bar{v}) - 2(\bar{v}^T \underline{M})(\bar{v}^T \underline{K} \bar{v})}{(\bar{v}^T \underline{M} \bar{v})^2} \\ &= \frac{2}{\bar{v}^T \underline{M} \bar{v}} \left[(\bar{v}^T \underline{K}) - \rho(\bar{v}) (\bar{v}^T \underline{M}) \right],\end{aligned}$$

y por tanto

$$\left(\frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}} \right)^T = \frac{2}{\bar{v}^T \underline{M} \bar{v}} [\underline{K} \bar{v} - \rho(\bar{v}) \underline{M} \bar{v}].$$

Luego

$$\left. \left(\frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}} \right)^T \right|_{\bar{v}=\bar{u}_i} = \frac{2}{\bar{u}_i^T \underline{M} \bar{u}_i} [\underline{K} \bar{u}_i - \rho(\bar{u}_i) \underline{M} \bar{u}_i] = 2 [\underline{K} \bar{u}_i - \lambda_i \underline{M} \bar{u}_i] = \bar{0}.$$





TÉCNICAS AUXILIARES: Análisis de Rayleigh-Ritz (IIIb)

2. El cálculo de extremos de $\rho(\bar{u}^R)$ equivale al problema reducido:

Pues

$$\rho(\bar{u}^R) = \rho(\bar{v}) \Big|_{\bar{v}=\bar{u}^R} \implies \frac{d\rho(\bar{u}^R)}{d\bar{\alpha}} = \frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}} \Big|_{\bar{v}=\bar{u}^R} \left[\frac{d}{d\bar{\alpha}} (\underline{\Psi} \bar{\alpha}) \right] = \frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}} \Big|_{\bar{v}=\bar{u}^R} [\underline{\Psi}].$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\rho(\bar{u}^R)}{d\bar{\alpha}} \right)^T &= \underline{\Psi}^T \left(\frac{d\rho(\bar{v})}{d\bar{v}} \right)^T \Big|_{\bar{v}=\underline{\Psi} \bar{\alpha}} = \frac{2}{\bar{\alpha}^T \underline{\Psi}^T \underline{M} \underline{\Psi} \bar{\alpha}} \underline{\Psi}^T \left[\underline{K} \underline{\Psi} \bar{\alpha} - \rho(\bar{u}^R) \underline{M} \underline{\Psi} \bar{\alpha} \right] \\ &= \frac{2}{\bar{\alpha}^T \underline{M}^R \bar{\alpha}} \left[\underline{K}^R \bar{\alpha} - \lambda^R \underline{M}^R \bar{\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Luego

$$\left(\frac{d\rho(\bar{u}^R)}{d\bar{\alpha}} \right)^T = \bar{0} \implies \underline{K}^R \bar{\alpha} = \lambda^R \underline{M}^R \bar{\alpha}.$$





TÉCNICAS AUXILIARES: Análisis de Rayleigh-Ritz (IIIc)

3. Si el subespacio $\{\bar{u}^R\}$ contiene un autovector \bar{u}_i el análisis de Rayleigh-Ritz lo detecta:

Pues

$$\begin{aligned}\bar{u}_i = \underline{\Psi} \bar{\beta} &\implies \underline{K}^R \bar{\beta} = \left[\underline{\Psi}^T \underline{K} \underline{\Psi} \right] \bar{\beta} = \underline{\Psi}^T \underline{K} \left[\underline{\Psi} \bar{\beta} \right] = \underline{\Psi}^T \underline{K} \bar{u}_i \\ &= \underline{\Psi}^T \left[\underline{K} \bar{u}_i \right] = \underline{\Psi}^T \left[\lambda_i \underline{M} \bar{u}_i \right] = \lambda_i \underline{\Psi}^T \underline{M} \bar{u}_i \\ &= \lambda_i \underline{\Psi}^T \underline{M} \left[\underline{\Psi} \bar{\beta} \right] = \lambda_i \left[\underline{\Psi}^T \underline{M} \underline{\Psi} \right] \bar{\beta} = \lambda_i \underline{M}^R \bar{\beta}.\end{aligned}$$



MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (I)

PROBLEMA ESTÁNDAR

[\underline{A} real simétrica]

Sea el problema

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} \bar{u}_i &= \lambda_i \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Dado un vector arbitrario \bar{v}_0 , el **MÉTODO DE MISES DIRECTO** consiste en:

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_{k+1} &= \frac{\underline{A} \bar{v}_k}{|\underline{A} \bar{v}_k|} \\ \rho_{k+1} &= \rho(\bar{v}_{k+1}) \end{aligned} \right\} \quad k = 0, \dots, (\text{hasta convergencia})$$

Si λ_{MAX} es el **mayor autovalor en valor absoluto**,

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{v}_k &= \bar{\omega} \mid \underline{A} \bar{\omega} = \lambda_{MAX} \bar{\omega}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k &= \rho(\bar{\omega}) = \lambda_{MAX}. \end{aligned} \right. \quad \text{[en general, y casi siempre]}$$





MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (Ila)

FUNCIONAMIENTO DEL MÉTODO

Observamos que

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_1 = \frac{\underline{A} \bar{v}_0}{|\underline{A} \bar{v}_0|} = \frac{\underline{A}^1 \bar{v}_0}{|\underline{A}^1 \bar{v}_0|} \\ \bar{v}_2 = \frac{\underline{A} \bar{v}_1}{|\underline{A} \bar{v}_1|} = \frac{\underline{A} \frac{\underline{A}^1 \bar{v}_0}{|\underline{A}^1 \bar{v}_0|}}{\left| \underline{A} \frac{\underline{A}^1 \bar{v}_0}{|\underline{A}^1 \bar{v}_0|} \right|} = \frac{\underline{A}^2 \bar{v}_0}{|\underline{A}^2 \bar{v}_0|} \\ \bar{v}_3 = \frac{\underline{A} \bar{v}_2}{|\underline{A} \bar{v}_2|} = \frac{\underline{A} \frac{\underline{A}^2 \bar{v}_0}{|\underline{A}^2 \bar{v}_0|}}{\left| \underline{A} \frac{\underline{A}^2 \bar{v}_0}{|\underline{A}^2 \bar{v}_0|} \right|} = \frac{\underline{A}^3 \bar{v}_0}{|\underline{A}^3 \bar{v}_0|} \\ \vdots \\ \bar{v}_k = \frac{\underline{A} \bar{v}_{k-1}}{|\underline{A} \bar{v}_{k-1}|} = \frac{\underline{A} \frac{\underline{A}^{k-1} \bar{v}_0}{|\underline{A}^{k-1} \bar{v}_0|}}{\left| \underline{A} \frac{\underline{A}^{k-1} \bar{v}_0}{|\underline{A}^{k-1} \bar{v}_0|} \right|} = \frac{\underline{A}^k \bar{v}_0}{|\underline{A}^k \bar{v}_0|} \end{array} \right.$$





MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (IIb)

Los autovectores forman una base. Por tanto, el vector inicial \bar{v}_0 puede escribirse en la forma $\bar{v}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{u}_i$. Luego

$$\bar{v}_k = \frac{\underline{\underline{A}}^k \bar{v}_0}{\left| \underline{\underline{A}}^k \bar{v}_0 \right|} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{\underline{A}}^k \bar{u}_i}{\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \underline{\underline{A}}^k \bar{u}_i \right|}.$$

Pero $\underline{\underline{A}}^k \bar{u}_i = \underline{\underline{A}}^{k-1} (\underline{\underline{A}} \bar{u}_i) = \lambda_i \underline{\underline{A}}^{k-1} \bar{u}_i \implies \underline{\underline{A}}^k \bar{u}_i = \lambda_i^k \bar{u}_i$. Por tanto

$$\bar{v}_k = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \bar{u}_i}{\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i^k \bar{u}_i \right|} = \frac{\alpha_1 \lambda_1^k \bar{u}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \bar{u}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k \bar{u}_n}{\left| \alpha_1 \lambda_1^k \bar{u}_1 + \alpha_2 \lambda_2^k \bar{u}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n^k \bar{u}_n \right|}.$$



MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (IIC)

Casos más importantes:

1. Hay un sólo autovalor predominante

$$|\lambda_n| > |\lambda_i| \quad \forall i < n.$$

2. Hay un autovalor predominante con orden de multiplicidad p

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_{n-(p-1)}, \quad |\lambda_n| > |\lambda_i| \quad \forall i \leq n - p.$$

3. Hay dos autovalores predominantes de signos opuestos

$$\lambda_1 = -\lambda_n, \quad |\lambda_n| \geq |\lambda_i| \quad \forall i.$$





MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (IId1)

1. Hay un sólo autovalor predominante

Sea $|\lambda_n| > |\lambda_i| \quad \forall i < n$.

Escribimos
$$\bar{v}_k = \frac{\sum_{i < n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i}{\left| \sum_{i < n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i \right|} = \frac{\sum_{i < n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i + \alpha_n \bar{u}_n}{\left| \sum_{i < n} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i + \alpha_n \bar{u}_n \right|}.$$

Luego
$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{v}_k = \bar{u}_n, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \rho(\bar{u}_n) = \lambda_n. \end{cases} \quad [\text{si } \alpha_n \neq 0]$$

Notas:

- ♠ En el caso $\alpha_n = 0$ el método convergerá en general (falsamente) al mayor autovalor en valor absoluto cuyo coeficiente α sea distinto de cero. (*)
- ♣ Por este motivo conviene repetir el cálculo con distintos vectores iniciales \bar{v}_0 .

(*) Si se permite al método iterar suficientemente, es probable que los errores de redondeo introduzcan una componente según \bar{u}_n que acabe conduciendo a la solución correcta.





MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (IId2)

2. Hay un autovalor predominante con orden de multiplicidad p

Sea $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_{n-(p-1)}$, $|\lambda_n| > |\lambda_i| \quad \forall i \leq n - p$.

Escribimos
$$\bar{v}_k = \frac{\sum_{i \leq n-p} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i + \sum_{i > n-p} \alpha_i \bar{u}_i}{\left| \sum_{i \leq n-p} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i + \sum_{i > n-p} \alpha_i \bar{u}_i \right|}.$$

Luego
$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{v}_k = \bar{\omega} \mid \underline{A} \bar{\omega} = \lambda_n \bar{\omega}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \rho(\bar{\omega}) = \lambda_n. \end{cases} \quad \text{[si } \alpha_i \neq 0 \text{ para algún } i > n - p]$$

Notas:

- ♠ En el caso $\alpha_i = 0 \quad \forall i > n - p$ el método convergerá en general (falsamente) al mayor autovalor en valor absoluto cuyo coeficiente α sea distinto de cero. (*)
- ♣ Por este motivo conviene repetir el cálculo con distintos vectores iniciales \bar{v}_0 .

(*) Si se permite al método iterar suficientemente, es probable que los errores de redondeo introduzcan una componente según $\{\bar{u}_n, \bar{u}_{n-1}, \dots, \bar{u}_{n-(p-1)}\}$ que acabe conduciendo a la solución correcta.





MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (IId3a)

3. Hay dos autovalores predominantes de signos opuestos

Sea $\lambda_1 = -\lambda_n$, $|\lambda_n| \geq |\lambda_i| \quad \forall i$.

Supongamos que
$$\begin{cases} \lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_{n-(p-1)} \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_q, \\ |\lambda_n| = |\lambda_1| > |\lambda_i| \quad \text{para } q < i \leq n - p. \end{cases}$$

Escribimos
$$\bar{v}_k = \frac{\sum_{i \leq q} \alpha_i (-1)^k \bar{u}_i + \sum_{q < i \leq n-p} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i + \sum_{i > n-p} \alpha_i \bar{u}_i}{\sum_{i \leq q} \alpha_i (-1)^k \bar{u}_i + \sum_{q < i \leq n-p} \alpha_i \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_n}\right)^k \bar{u}_i + \sum_{i > n-p} \alpha_i \bar{u}_i}.$$

Luego
$$\begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{v}_k = \pm \bar{\omega}_q + \bar{\omega}_p, & \begin{cases} \underline{A} \bar{\omega}_q = -\lambda_n \bar{\omega}_q, \\ \underline{A} \bar{\omega}_p = \lambda_n \bar{\omega}_p, \end{cases} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \rho(\pm \bar{\omega}_q + \bar{\omega}_p) \neq \pm \lambda_n. \end{cases}$$

[si $\alpha_i \neq 0$ para algún $i > n - p$ y para algún $i \leq q$]





MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (IId3b)

Notas:

- ♠ Obsérvese que el método no convergerá a un autovector, sino que oscilará entre dos vectores que serán combinación lineal de dos autovectores ($\bar{\omega}_p$ y $\bar{\omega}_q$).
A partir de los valores entre los que oscila el método es posible obtener los correspondientes autovectores y sus autovalores.
- ♠ En el caso $\alpha_i = 0 \forall i > n - p \forall i \leq q$ el método convergerá en general (falsamente) al mayor autovalor en valor absoluto cuyo coeficiente α sea distinto de cero. (*)
- ♣ Por este motivo conviene repetir el cálculo con distintos vectores iniciales \bar{v}_0 .

(*) Si se permite al método iterar suficientemente, es probable que los errores de redondeo introduzcan una componente según $\{\bar{u}_n, \bar{u}_{n-1}, \dots, \bar{u}_{n-(p-1)}\}$ que acabe conduciendo a la solución correcta.





MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (IIa)

OBSERVACIONES

- ♣ En el estudio anterior se observa que el método converge en general al **autovector** \bar{u}_n asociado al mayor **autovalor** en valor absoluto λ_n .
 - ♣ Una vez calculado el autovalor predominante, puede aplicarse una reducción de autovalores para obtener el autovalor siguiente.
 - ♠ Este procedimiento no puede aplicarse para obtener todos los autovalores, ya que los errores se acumulan y los resultados se degradan considerablemente cada vez que se realiza una reducción.
- ♣ Conviene repetir el cálculo con distintos vectores iniciales antes de aceptar una solución como buena.
- ♣ El método tiene **orden de convergencia lineal**, con factor asintótico de convergencia

$$\text{FAC} = \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|.$$

- ◇ Cuando los autovalores están muy separados, es decir $|\lambda_n| \gg |\lambda_{n-1}|$, la velocidad de convergencia será muy elevada.
- ♣ Cuando los autovalores están muy juntos, es decir $|\lambda_n| \approx |\lambda_{n-1}|$, la velocidad de convergencia será muy baja.





MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (IIIb)

OBSERVACIONES (continuación)

- ♥ La aproximación del autovalor se obtiene mediante el Cociente de Rayleigh. Por este motivo, la convergencia al autovalor también es lineal, pero con factor asintótico de convergencia

$$\text{FAC} = \left| \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} \right|^2.$$

- ♥ La aproximación del autovalor será mucho mejor que la aproximación del autovector.





MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (IVa)

Obtención de la expresión para el Prob. Generalizado

Se sabe que dado el problema

$$\underline{\underline{K}} \bar{u} = \lambda \underline{\underline{M}} \bar{u}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underline{\underline{K}} & \text{real, simétrica,} \\ \underline{\underline{M}} & \text{real, simétrica, DEF+,} \end{cases}$$

siempre se puede factorizar $\underline{\underline{M}} = \underline{\underline{L}} \underline{\underline{L}}^T$.

Luego

$$\underline{\underline{K}} \bar{u} = \lambda \underline{\underline{M}} \bar{u} \iff \underline{\underline{\hat{K}}} \hat{u} = \lambda \hat{u}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\hat{K}}} = \underline{\underline{L}}^{-1} \underline{\underline{K}} \underline{\underline{L}}^{-T}, \\ \hat{u} = \underline{\underline{L}}^T \bar{u}. \end{cases}$$

A cada vector \bar{v} del problema generalizado, le corresponde un vector del problema estándar equivalente $\hat{v} = \underline{\underline{L}}^T \bar{v}$.





MÉTODO DE MISES: Fundamentación Teórica (IVb)

Por tanto, al vector unitario arbitrario \widehat{v}_0 del problema estándar le corresponderá el vector \bar{v}_0 del problema generalizado, que verifica $\widehat{v}_0 = \underline{L}^T \bar{v}_0$, $\bar{v}_0^T \underline{M} \bar{v}_0 = 1$.

Al aplicar el Método de Mises al problema estándar equivalente se obtiene

$$\left. \begin{aligned} \widehat{v}_{k+1} &= \frac{\widehat{K} \widehat{v}_k}{|\widehat{K} \widehat{v}_k|} \\ \rho_{k+1} &= \widehat{\rho}(\widehat{v}_{k+1}) \end{aligned} \right\} k = 0, \dots, \text{(hasta convergencia)}$$

Al vector \widehat{v}_k del problema estándar le corresponderá el vector \bar{v}_k del problema generalizado, que verifica $\widehat{v}_k = \underline{L}^T \bar{v}_k$, $\bar{v}_k^T \underline{M} \bar{v}_k = 1$. Por tanto, lo anterior es equivalente a

$$\left. \begin{aligned} \underline{L}^T \bar{v}_{k+1} &= \frac{[\underline{L}^{-1} \underline{K} \underline{L}^{-T}] (\underline{L}^T \bar{v}_k)}{|[\underline{L}^{-1} \underline{K} \underline{L}^{-T}] (\underline{L}^T \bar{v}_k)|} = \frac{\underline{L}^{-1} \underline{K} \bar{v}_k}{|\underline{L}^{-1} \underline{K} \bar{v}_k|} \\ \rho_{k+1} &= \rho(v_{k+1}) \end{aligned} \right\} k = 0, \dots, \text{(hasta convergencia)}$$





MÉTODO DE MISES: Programación (Ia)

PROBLEMA ESTÁNDAR

[\underline{A} real simétrica]

♣ Algoritmo:

Dado \bar{v}_0 | $\bar{v}_0^T \bar{v}_0 = 1$

Para $k = 0, 1, \dots$ (hasta convergencia)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{calcular} \quad \bar{v}_{k+1} = \frac{\underline{A} \bar{v}_k}{|\underline{A} \bar{v}_k|} \quad [\implies \bar{v}_{k+1}^T \bar{v}_{k+1} = 1] \\ \text{calcular} \quad \rho_{k+1} = \rho(\bar{v}_{k+1}) = \frac{\bar{v}_{k+1}^T \underline{A} \bar{v}_{k+1}}{\bar{v}_{k+1}^T \bar{v}_{k+1}} = \bar{v}_{k+1}^T \underline{A} \bar{v}_{k+1} \end{array} \right.$$





MÉTODO DE MISES: Programación (Ib)

PROBLEMA ESTÁNDAR

[\underline{A} real simétrica]

♣ PROGRAMACIÓN:

Dado \bar{v}_0 | $\bar{v}_0^T \bar{v}_0 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{calcular} \quad \bar{w}_0 = \underline{A} \bar{v}_0 \\ \text{calcular} \quad \rho_0 = \bar{v}_0^T \bar{w}_0 \end{array} \right.$$

Para $k = 0, 1, \dots$ (hasta convergencia)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{calcular} \quad \bar{v}_{k+1} = \frac{\bar{w}_k}{|\bar{w}_k|} \\ \text{calcular} \quad \bar{w}_{k+1} = \underline{A} \bar{v}_{k+1} \\ \text{calcular} \quad \rho_{k+1} = \bar{v}_{k+1}^T \bar{w}_{k+1} \end{array} \right.$$





MÉTODO DE MISES: Programación (IIa)

PROBLEMA GENERALIZADO

[\underline{K} y \underline{M} reales simétricas, \underline{M} DEF+]

♣ Algoritmo:

Dado \bar{v}_0 | $\bar{v}_0^T \underline{M} \bar{v}_0 = 1$

Para $k = 0, 1, \dots$ (hasta convergencia)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{resolver} \quad \underline{L}^T \bar{v}_{k+1} = \frac{\underline{L}^{-1} \underline{K} \bar{v}_k}{|\underline{L}^{-1} \underline{K} \bar{v}_k|} \quad [\implies \bar{v}_{k+1}^T \underline{M} \bar{v}_{k+1} = 1] \\ \text{calcular} \quad \rho_{k+1} = \rho(\bar{v}_{k+1}) = \frac{\bar{v}_{k+1}^T \underline{K} \bar{v}_{k+1}}{\bar{v}_{k+1}^T \underline{M} \bar{v}_{k+1}} = \bar{v}_{k+1}^T \underline{K} \bar{v}_{k+1} \end{array} \right.$$

Para ello se habrá factorizado previamente la matriz \underline{M} en la forma

$$\underline{M} = \underline{L} \underline{L}^T.$$





MÉTODO DE MISES: Programación (IIb)

PROBLEMA GENERALIZADO

[\underline{K} y \underline{M} reales simétricas, \underline{M} DEF+]

♣ PROGRAMACIÓN:

Dado \bar{v}_0 | $\bar{v}_0^T \underline{M} \bar{v}_0 = 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{calcular} \quad \bar{w}_0 = \underline{K} \bar{v}_0 \\ \text{calcular} \quad \rho_0 = \bar{v}_0^T \bar{w}_0 \end{array} \right.$$

Para $k = 0, 1, \dots$ (hasta convergencia)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{resolver} \quad \underline{L} \bar{z}_{k+1} = \bar{w}_k \\ \text{resolver} \quad \underline{L}^T \bar{y}_{k+1} = \bar{z}_{k+1} \\ \text{calcular} \quad \bar{v}_{k+1} = \frac{\bar{y}_{k+1}}{|\bar{z}_{k+1}|} \\ \text{calcular} \quad \bar{w}_{k+1} = \underline{K} \bar{v}_{k+1} \\ \text{calcular} \quad \rho_{k+1} = \bar{v}_{k+1}^T \bar{w}_{k+1} \end{array} \right.$$





Criterio de Convergencia

$$\text{CONVERGENCIA} = \left(|\bar{v}_{k+1} - \bar{v}_k| \leq \max(e_u, r_u |\bar{v}_{k+1}|) \right) \text{.AND.} \\ \left(|\rho_{k+1} - \rho_k| \leq \max(e_\lambda, r_\lambda |\rho_{k+1}|) \right)$$

- ♣ La convergencia suele ser mucho más rápida en el caso del autovalor que en el caso del autovector, debido a la 3.^a propiedad del Cociente de Rayleigh.



MÉTODO DE MISES: Variantes (I)

MÉTODO DE MISES INVERSO

[\underline{K} y \underline{M} reales simétricas y DEF+]

- ♣ Se aplica el Método de Mises al problema inverso.
 - Si se trata de un problema generalizado, se permutan las matrices \underline{K} y \underline{M} .
 - El problema estándar se considera generalizado con $\underline{K} = \underline{A}$, $\underline{M} = \underline{I}$.
- ♣ Hay que factorizar la matriz \underline{K} en lugar de la matriz \underline{M} .
 - Se suele realizar en cualquier caso, por lo que el proceso no se encarece. (ejemplo: problemas de cálculo de estructuras, MEF, etc.).
- ♥ **Converge al autovector asociado al menor autovalor (en módulo).**
 - ES LO QUE NORMALMENTE SE REQUIERE EN INGENIERÍA.
- ◇ La convergencia suele ser muy rápida.
 - El inverso del menor autovalor suele estar separado del inverso del siguiente. (por ejemplo $\lambda_1 = 0.001$ y $\lambda_2 = 0.01$).





MÉTODO DE MISES: Variantes (II)

MÉTODO DE MISES AJUSTABLE

[\underline{K} y \underline{M} reales simétricas y DEF+]

Dado el problema generalizado

$$\left. \begin{aligned} \underline{K} \bar{u}_i &= \lambda_i \underline{M} \bar{u}_i \\ \bar{u}_i^T \underline{M} \bar{u}_j &= \delta_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i, j = 1 \dots, n.$$

Se pretende hallar el autovalor más próximo al valor μ . Para ello se define

$$\begin{aligned} \underline{K}' &= \underline{M} \\ \underline{M}' &= \underline{K} - \mu \underline{M} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \underline{K}' \bar{u}_i = (\lambda_i - \mu)^{-1} \underline{M}' \bar{u}_i.$$

que equivale a realizar una traslación de valor $-\mu$ seguida de una inversión.

El mayor autovalor de este problema será $\max_{i=1, \dots, n} |(\lambda_i - \mu)^{-1}| = \left(\min_{i=1, \dots, n} |\lambda_i - \mu| \right)^{-1}$.

Al aplicar el Método de Mises Directo a este problema obtendremos el valor buscado.





MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (I)

PROBLEMA ESTÁNDAR

[\underline{A} real simétrica]

Sea el problema

$$\left. \begin{aligned} \underline{A} \underline{U} &= \underline{U} \underline{\Lambda} \\ \underline{U}^T \underline{U} &= \underline{I} \end{aligned} \right\}$$

con

$$\left\{ \begin{aligned} \underline{U} &= [\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \dots \quad \bar{u}_n], \\ \underline{\Lambda} &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \right.$$

El **MÉTODO DE JACOBI** consiste en:

$$\left. \begin{aligned} \underline{A}_o &= \underline{A} & \mapsto & \underline{A}_{k+1} = \left(\underline{Q}_{k+1} \right)^{-1} \underline{A}_k \underline{Q}_{k+1} \\ \underline{P}_o &= \underline{I} & \mapsto & \underline{P}_{k+1} = \underline{P}_k \underline{Q}_{k+1} \end{aligned} \right\}$$

$k = 0, \dots$, (hasta convergencia)

Si,

$$\left. \begin{aligned} \underline{Q}_{k+1}^{-1} &= \underline{Q}_{k+1}^T \quad (\text{matrices ortogonales}) \\ \text{las } \underline{Q}_{k+1} &\text{ se eligen } \mathbf{ADECUADAMENTE} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{A}_k &= \underline{A}_\infty = \underline{\Lambda}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{P}_k &= \underline{P}_\infty = \underline{U}. \end{aligned} \right.$$





MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (IIa)

Algunas demostraciones previas

DP1. Las matrices semejantes entre sí tienen los mismos autovalores:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{A}\bar{u} = \lambda\bar{u} \\ \underline{B} = \underline{P}^{-1}\underline{A}\underline{P} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{A} = \underline{P}\underline{B}\underline{P}^{-1}, \\ \underline{P}\underline{B}\underline{P}^{-1}\bar{u} = \lambda\bar{u}, \\ \underline{B}(\underline{P}^{-1}\bar{u}) = \lambda(\underline{P}^{-1}\bar{u}), \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{B}\bar{v} = \lambda\bar{v}, \\ \text{con } \bar{v} = \underline{P}^{-1}\bar{u}. \end{array} \right.$$

DP2. Las matrices semejantes entre sí tienen la misma traza:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{B} = \underline{P}^{-1}\underline{A}\underline{P} \\ \text{con } \underline{P}^{-1} = \underline{X} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b_{ij} = \sum_{\gamma,\beta} x_{i\gamma} a_{\gamma\beta} p_{\beta j}, \\ \text{tr}(\underline{B}) = \sum_i b_{ii} = \sum_i \sum_{\gamma,\beta} x_{i\gamma} a_{\gamma\beta} p_{\beta i} \\ = \sum_{\gamma,\beta} a_{\gamma\beta} \sum_i p_{\beta i} x_{i\gamma} = \sum_{\gamma,\beta} a_{\gamma\beta} \delta_{\beta\gamma} \\ = \sum_{\gamma} a_{\gamma\gamma} = \text{tr}(\underline{A}). \end{array} \right.$$





MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (IIb)

DP3. Los cuadrados de matrices semejantes entre sí también son semejantes entre sí:

$$\underline{B} = \underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} \quad \Rightarrow \quad \underline{B}^2 = \left[\underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} \right] \left[\underline{P}^{-1} \underline{A} \underline{P} \right] = \underline{P}^{-1} \underline{A}^2 \underline{P}.$$

DP4. La traza del cuadrado de una matriz simétrica es igual a la suma de los cuadrados de sus coeficientes:

$$\left. \begin{array}{l} \underline{Y} = \underline{X}^2 \\ \text{con } \underline{X}^T = \underline{X} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_{ij} = \sum_{\beta} x_{i\beta} x_{\beta j}, \\ \text{tr}(\underline{Y}) = \sum_{\gamma} y_{\gamma\gamma} = \sum_{\gamma} \sum_{\beta} x_{\gamma\beta} x_{\beta\gamma} \\ = \sum_{\gamma, \beta} x_{\gamma\beta}^2. \end{array} \right.$$





FUNCIONAMIENTO DEL MÉTODO

1. Las matrices $\{\underline{P}_{k+1}\}_{k=0,\dots,\infty}$ son **ortogonales**:

$$\underline{P}_{k+1} = \underline{Q}_1 \cdots \underline{Q}_k \underline{Q}_{k+1} \implies \underline{P}_{k+1}^{-1} = \underline{P}_{k+1}^T. \quad (\text{ortogonalidad})$$

2. Las matrices $\{\underline{A}_{k+1}\}_{k=0,\dots,\infty}$ son **semejantes** a la matriz \underline{A} y **simétricas**:

$$\underline{A}_{k+1} = \underline{P}_{k+1}^{-1} \underline{A} \underline{P}_{k+1} \quad (\text{semejanza ortogonal}) \implies \underline{A}_{k+1}^T = \underline{A}_{k+1}.$$

3. Las matrices $\{\underline{A}_{k+1}\}_{k=0,\dots,\infty}$ tienen **los mismos autovalores** que la matriz \underline{A} :

$$\underline{A} \underline{U} = \underline{U} \underline{\Lambda} \implies \underline{A}_{k+1} \underline{U}_{k+1} = \underline{U}_{k+1} \underline{\Lambda}, \quad \text{con} \quad \underline{U}_{k+1} = \underline{P}_{k+1}^{-1} \underline{U}.$$

4. Si las \underline{Q}_{k+1} se eligen **ADECUADAMENTE**, el método converge:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\gamma \neq \beta} \left(a_{\gamma\beta}^k \right)^2 = 0 \implies \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{A}_k = \underline{A}_\infty = \underline{\Lambda}, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \underline{P}_k = \underline{P}_\infty = \underline{U}. \end{cases}$$



MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (IVa)

Demostraciones

1. Las matrices $\{\underline{P}_{k+1}\}_{k=0,\dots,\infty}$ son ortogonales.

Pues

$$\begin{aligned}\underline{P}_{k+1} &= \underline{P}_k \underline{Q}_{k+1} = \left[\underline{P}_{k-1} \underline{Q}_k \right] \underline{Q}_{k+1} = \left[\left[\dots \left[\underline{P}_0 \underline{Q}_1 \right] \dots \right] \underline{Q}_k \right] \underline{Q}_{k+1} \\ &= \left[\underline{Q}_1 \dots \underline{Q}_k \underline{Q}_{k+1} \right].\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\underline{P}_{k+1}^{-1} &= \left[\underline{Q}_1 \dots \underline{Q}_k \underline{Q}_{k+1} \right]^{-1} = \underline{Q}_{k+1}^{-1} \underline{Q}_k^{-1} \dots \underline{Q}_1^{-1} \\ &= \underline{Q}_{k+1}^T \underline{Q}_k^T \dots \underline{Q}_1^T = \left[\underline{Q}_1 \dots \underline{Q}_k \underline{Q}_{k+1} \right]^T \\ &= \underline{P}_{k+1}^T. \quad (\text{ortogonalidad})\end{aligned}$$





MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (IVb)

2. Las matrices $\{\underline{A}_{k+1}\}_{k=0,\dots,\infty}$ son semejantes a la matriz \underline{A} y simétricas.

Pues

$$\begin{aligned}\underline{A}_{k+1} &= \underline{Q}_{k+1}^{-1} \underline{A}_k \underline{Q}_{k+1} \\ &= \underline{Q}_{k+1}^{-1} \left[\underline{Q}_k^{-1} \underline{A}_{k-1} \underline{Q}_k \right] \underline{Q}_{k+1} \\ &= \underline{Q}_{k+1}^{-1} \left[\underline{Q}_k^{-1} \left[\dots \left[\underline{Q}_1^{-1} \underline{A}_0 \underline{Q}_1 \right] \dots \right] \underline{Q}_k \right] \underline{Q}_{k+1} \\ &= \left[\underline{Q}_{k+1}^{-1} \underline{Q}_k^{-1} \dots \underline{Q}_1^{-1} \right] \underline{A} \left[\underline{Q}_1 \dots \underline{Q}_k \underline{Q}_{k+1} \right] \\ &= \underline{P}_{k+1}^{-1} \underline{A} \underline{P}_{k+1}. \quad (\text{semejanza ortogonal})\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\underline{A}_{k+1}^T &= \left[\underline{P}_{k+1}^{-1} \underline{A} \underline{P}_{k+1} \right]^T = \left[\underline{P}_{k+1}^T \underline{A} \underline{P}_{k+1} \right]^T \\ &= \left[\underline{P}_{k+1}^T \underline{A} \underline{P}_{k+1} \right] = \left[\underline{P}_{k+1}^{-1} \underline{A} \underline{P}_{k+1} \right] \\ &= \underline{A}_{k+1}.\end{aligned}$$





MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (IVc)

3. Las matrices $\{\underline{A}_{k+1}\}_{k=0,\dots,\infty}$ tienen los mismos autovalores que la matriz \underline{A} .

Pues

$$\begin{aligned}\underline{A} \underline{U} &= \underline{U} \underline{\Lambda} \implies \left[\underline{P}_{k+1} \underline{A}_{k+1} \underline{P}_{k+1}^{-1} \right] \underline{U} = \underline{U} \underline{\Lambda} \\ &\implies \underline{A}_{k+1} \left[\underline{P}_{k+1}^{-1} \underline{U} \right] = \left[\underline{P}_{k+1}^{-1} \underline{U} \right] \underline{\Lambda} \\ &\implies \underline{A}_{k+1} \underline{U}_{k+1} = \underline{U}_{k+1} \underline{\Lambda}, \quad \text{con} \quad \underline{U}_{k+1} = \underline{P}_{k+1}^{-1} \underline{U}.\end{aligned}$$



MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (Va)

Elección de las matrices \tilde{Q}_{k+1}

1. Se explora la parte superior de \tilde{A}_k para hallar $a_{ij}^k = a_{ji}^k = \max_{i < j} \{ |a_{ij}^k| \}$.

$$\tilde{A}_k = \begin{bmatrix} a_{11}^k & \cdots & a_{1i}^k & \cdots & a_{1j}^k & \cdots & a_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}^k & \cdots & a_{ii}^k & \cdots & a_{ij}^k & \cdots & a_{in}^k \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}^k & \cdots & a_{ji}^k & \cdots & a_{jj}^k & \cdots & a_{jn}^k \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^k & \cdots & a_{ni}^k & \cdots & a_{nj}^k & \cdots & a_{nn}^k \end{bmatrix}$$

→ fila i

→ fila j

↓ ↓
columna i columna j





MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (Vb)

2. Se calculan

$$\left. \begin{aligned} p &= 2 a_{ij}^k \operatorname{sgn}(a_{ii}^k - a_{jj}^k) \\ q &= |a_{ii}^k - a_{jj}^k| \\ r &= \sqrt{p^2 + q^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \tan(2\alpha) &= \frac{p}{q}, \\ \cos(2\alpha) &= \frac{q}{r}, \\ \operatorname{sen}(2\alpha) &= \frac{p}{r}, \\ \cos(\alpha) &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{q}{r}\right)}, \\ \operatorname{sen}(\alpha) &= \frac{p}{2 r \cos(\alpha)}. \end{aligned} \right.$$

(*) Lo que equivale a

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 a_{ij}^k}{a_{ii}^k - a_{jj}^k} \iff \alpha = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2 a_{ij}^k}{a_{ii}^k - a_{jj}^k} \right), \text{ con } -\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}.$$





MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (Vc)

3. Se construye

$$\underline{Q}_{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & \cos(\alpha) & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \text{sen}(\alpha) & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & \cos(\alpha) & & \\ & & & & & & & & \text{sen}(\alpha) & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \longrightarrow \text{fila } i \\ \cdot \\ \longrightarrow \text{fila } j \end{matrix}$$

↓
columna i ↓
columna j

Estas matrices verifican $\underline{Q}_{k+1}^{-1} = \underline{Q}_{k+1}^T = \underline{Q}_{k+1}$ (son **AUTOINVERSAS**).





MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (VIa)

OBSERVACIONES

1. Debido a la **FORMA** de \underline{Q}_{k+1} , entre \underline{A}_k y $\underline{A}_{k+1} = \left(\underline{Q}_{k+1}\right)^{-1} \underline{A}_k \underline{Q}_{k+1}$ sólo cambian los componentes de las filas i y j .

2. En particular

$$a_{ii}^{k+1} = a_{ii}^k \cos^2 \alpha + a_{jj}^k \sin^2 \alpha + 2 a_{ij}^k \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$a_{jj}^{k+1} = a_{ii}^k \sin^2 \alpha + a_{jj}^k \cos^2 \alpha - 2 a_{ij}^k \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$a_{ij}^{k+1} = \left(a_{ii}^k - a_{jj}^k\right) \sin \alpha \cos \alpha - a_{ij}^k \left(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha\right),$$

$$a_{ji}^{k+1} = a_{ij}^{k+1}.$$

3. Para el valor elegido de α se verifica

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ji}^{k+1} = 0.$$





MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (VIb)

Por tanto,

$$\underline{A}_{k+1} = \begin{bmatrix} a_{11}^k & \dots & a_{1i}^{k+1} & \dots & a_{1j}^{k+1} & \dots & a_{1n}^k \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}^{k+1} & \dots & a_{ii}^{k+1} & \dots & 0 & \dots & a_{in}^{k+1} \longrightarrow \text{fila } i \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}^{k+1} & \dots & 0 & \dots & a_{jj}^{k+1} & \dots & a_{jn}^{k+1} \longrightarrow \text{fila } j \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^k & \dots & a_{ni}^{k+1} & \dots & a_{nj}^{k+1} & \dots & a_{nn}^k \end{bmatrix}$$

↓ ↓
columna *i* columna *j*





MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (VIc)

4. Para el valor elegido de α se verifica

$$\left(a_{ii}^{k+1} \right)^2 + \left(a_{jj}^{k+1} \right)^2 = \left(a_{ii}^k \right)^2 + \left(a_{jj}^k \right)^2 + 2 \left(a_{ij}^k \right)^2 .$$

5. Luego, si $D_k = \sum_{\gamma=\beta} \left(a_{\gamma\beta}^k \right)^2$, entonces

$$D_{k+1} = D_k + 2 \left(a_{ij}^k \right)^2 \geq D_k. \quad (*)$$

(*) Pues $a_{\gamma\gamma}^{k+1} = a_{\gamma\gamma}^k$ para $\gamma \notin \{i, j\}$.





MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (Vld)

6. Luego, si $\Phi_k = \sum_{\gamma \neq \beta} (a_{\gamma\beta}^k)^2$, entonces

$$\Phi_{k+1} \geq 0,$$

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - 2 (a_{ij}^k)^2 \leq \Phi_k. \quad (*)$$

(*) Pues $\text{tr}(\underline{A}_{k+1}^2) = \text{tr}(\underline{A}_k^2) = \text{tr}(\underline{A}^2)$ por ser semejantes.

Además, si $\underline{Y} = \underline{X}^2$ con $\underline{X} = \underline{X}^T$, entonces $\text{tr}(\underline{Y}) = \sum_{\gamma, \beta} (x_{\gamma\beta})^2 = \sum_{\gamma=\beta} (x_{\gamma\beta})^2 + \sum_{\gamma \neq \beta} (x_{\gamma\beta})^2$ (por DP4).

Por tanto, $D_{k+1} + \Phi_{k+1} = D_k + \Phi_k = \text{tr}(\underline{A}^2)$.





MÉTODO DE JACOBI: Fundamentación Teórica (Vle)

7. Además, $(a_{ij}^k)^2 \geq \frac{\Phi_k}{n^2 - n}$, pues el máximo es mayor o igual que la media.

8. En consecuencia

$$\Phi_{k+1} \geq 0,$$

$$\Phi_{k+1} = \Phi_k - 2 \left(a_{ij}^k \right)^2 \leq \Phi_k \underbrace{\left(\frac{n^2 - n - 2}{n^2 - n} \right)}_{\leq 1}, \quad \left. \vphantom{\Phi_{k+1}} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k = 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} D_k = \text{tr} \left(\underline{A}^2 \right). \end{cases}$$

