– **Typeset by GMNI &** FoilTEX –

FACTORIZACIONES DE CROUT Y DE CHOLESKY

F. Navarrina, I. Colominas, H. Gómez, J. París, M. Casteleiro

GMNI — GRUPO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA

Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de A Coruña, España

e-mail: fnavarrina@udc.es
página web: http://caminos.udc.es/gmni

ÍNDICE

- FACTORIZACIÓN DE CROUT $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{U}$
  - Fundamentos teóricos. Condiciones de existencia
  - Algoritmos de factorización y de solución de sistemas
  - Programación. Almacenamiento de los resultados sobre los datos
  - Adaptación para almacenamientos en banda y perfil
- FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY $\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{L}^T$
  - Fundamentos teóricos. Condiciones de existencia
  - Algoritmos de factorización y de solución de sistemas
  - Programación. Almacenamiento de los resultados sobre los datos
  - Adaptación para almacenamientos en banda y perfil

FACTORIZACIÓN DE CROUT $\quad [\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{U}]$

Sea el problema

$$\boxed{\underset{\sim}{A}\,\bar{x} = \bar{b}} \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}.$$

La FACTORIZACIÓN DE CROUT consiste en:

$$\boxed{\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{U}} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{L}\,\overbrace{\underset{\sim}{D}\,\underbrace{\underset{\sim}{U}\;\bar{x}}_{\bar{y}}}^{\bar{z}} = \bar{b} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \underset{\sim}{L}\,\bar{z} = \bar{b}, \\ \qquad\searrow \\ \underset{\sim}{D}\,\bar{y} = \bar{z}, \\ \qquad\searrow \\ \underset{\sim}{U}\,\bar{x} = \bar{y}. \end{cases}$$

FUNCIONAMIENTO DEL MÉTODO

Supongamos que ya hemos factorizado

$$\underset{\sim}{A}_k = \underset{\sim}{L}_k \, \underset{\sim}{D}_k \, \underset{\sim}{U}_k, \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{A}_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix},$$

siendo

$$\underset{\sim}{L}_k = \begin{bmatrix} l_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ l_{k1} & \cdots & l_{kk} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{D}_k = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{kk} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{U}_k = \begin{bmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1k} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{kk} \end{bmatrix}.$$

Pretendemos factorizar (a partir de lo anterior)

$$\underset{\sim}{A}_{k+1} = \underset{\sim}{L}_{k+1}\,\underset{\sim}{D}_{k+1}\,\underset{\sim}{U}_{k+1}, \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{A}_{k+1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_k & \bar{c}_{k+1} \\ \bar{f}^T_{k+1} & a_{k+1,k+1} \end{bmatrix},$$

de forma que

$$\underset{\sim}{L}_{k+1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{L}_k & \bar{0} \\ \bar{l}^T_{k+1} & l_{k+1,k+1} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{D}_{k+1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{D}_k & \bar{0} \\ \bar{0}^T & d_{k+1,k+1} \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{U}_{k+1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{U}_k & \bar{u}_{k+1} \\ \bar{0}^T & u_{k+1,k+1} \end{bmatrix}.$$

donde

$$\bar{c}_{k+1} = \begin{Bmatrix} a_{1,k+1} \\ \vdots \\ a_{k,k+1} \end{Bmatrix}, \qquad \bar{u}_{k+1} = \begin{Bmatrix} u_{1,k+1} \\ \vdots \\ u_{k,k+1} \end{Bmatrix},$$

$$\bar{f}^T_{k+1} = [\, a_{k+1,1} \quad \cdots \quad a_{k+1,k} \,], \qquad \bar{l}^T_{k+1} = [\, l_{k+1,1} \quad \cdots \quad l_{k+1,k} \,].$$

Multiplicamos por cajas ...

$$\underset{\sim}{D}_{k+1}\,\underset{\sim}{U}_{k+1} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{D}_k\,\underset{\sim}{U}_k + \overbrace{\bar{0}\,\bar{0}^T}^{\underset{\sim}{0}} & \overbrace{\underset{\sim}{D}_k\,\bar{u}_{k+1} + \bar{0}\,u_{k+1,k+1}}^{\bar{0}} \\ \underbrace{\bar{0}^T\underset{\sim}{U}_k}_{\bar{0}^T} + \underbrace{d_{k+1,k+1}\,\bar{0}^T}_{\bar{0}^T} & \underbrace{\bar{0}^T\bar{u}_{k+1}}_{0} + d_{k+1,k+1}\,u_{k+1,k+1} \end{bmatrix}.$$

$$\underset{\sim}{L}_{k+1}\,\left(\underset{\sim}{D}_{k+1}\,\underset{\sim}{U}_{k+1}\right) = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{L}_k\,\underset{\sim}{D}_k\,\underset{\sim}{U}_k + \overbrace{\bar{0}\,\bar{0}^T}^{\underset{\sim}{0}} & \underset{\sim}{L}_k\,\underset{\sim}{D}_k\,\bar{u}_{k+1} + \overbrace{\bar{0}\,d_{k+1,k+1}\,u_{k+1,k+1}}^{\bar{0}} \\ \bar{l}^T_{k+1}\underset{\sim}{D}_k\,\underset{\sim}{U}_k + \underbrace{l_{k+1,k+1}\,\bar{0}^T}_{\bar{0}^T} & \bar{l}^T_{k+1}\underset{\sim}{D}_k\,\bar{u}_{k+1} + l_{k+1,k+1}\,d_{k+1,k+1}\,u_{k+1,k+1} \end{bmatrix}.$$

Igualamos . . .

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{A}_k & \bar{c}_{k+1} \\ \bar{f}^T_{k+1} & a_{k+1,k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{L}_k\, \underset{\sim}{D}_k\, \underset{\sim}{U}_k & \underset{\sim}{L}_k\, \underset{\sim}{D}_k\, \bar{u}_{k+1} \\ \bar{l}^T_{k+1}\underset{\sim}{D}_k\, \underset{\sim}{U}_k & \bar{l}^T_{k+1}\underset{\sim}{D}_k\, \bar{u}_{k+1} + l_{k+1,k+1}\, d_{k+1,k+1}\, u_{k+1,k+1} \end{bmatrix},$$

lo que por cajas equivale a

$$\begin{cases} \underset{\sim}{A}_k = \underset{\sim}{L}_k\, \underset{\sim}{D}_k\, \underset{\sim}{U}_k, & [\Leftarrow \quad \textbf{HIPÓTESIS}] \\ \bar{c}_{k+1} = \underset{\sim}{L}_k\, \underset{\sim}{D}_k\, \boxed{\bar{u}_{k+1}}, & \\ \bar{f}^T_{k+1} = \boxed{\bar{l}^T_{k+1}}\, \underset{\sim}{D}_k\, \underset{\sim}{U}_k, & \\ a_{k+1,k+1} = \boxed{\bar{l}^T_{k+1}}\, \underset{\sim}{D}_k\, \boxed{\bar{u}_{k+1}} + \boxed{l_{k+1,k+1}}\, \boxed{d_{k+1,k+1}}\, \boxed{u_{k+1,k+1}}. & \end{cases}$$

Por tanto . . .

1. **El vector $\bar{u}_{k+1}$ es la solucíón del sistema**:

$$[\underset{\sim}{L}_k \ \underset{\sim}{D}_k] \ \boxed{\bar{u}_{k+1}} = \boxed{\bar{c}_{k+1}}.$$

2. **El vector $\bar{l}_{k+1}$ es la solucíón del sistema**:

$$[\underset{\sim}{U}_k^T \underset{\sim}{D}_k] \ \boxed{\bar{l}_{k+1}} = \boxed{\bar{f}_{k+1}}.$$

3. **Los coeficientes $l_{k+1,k+1}$, $d_{k+1,k+1}$ y $u_{k+1,k+1}$ verifican**:

$$\boxed{l_{k+1,k+1}} \ \boxed{d_{k+1,k+1}} \ \boxed{u_{k+1,k+1}} = \boxed{a_{k+1,k+1}} - \bar{l}_{k+1}^T \underset{\sim}{D}_k \ \bar{u}_{k+1}. \qquad (\star)$$

$(\star)$ Donde $\bar{l}_{k+1}$ y $\bar{u}_{k+1}$ se habrán calculado previamente.
Hay infinitas descomposiciones posibles. Por convenio, se eligen (arbitrariamente) los valores:

$$\boxed{l_{k+1,k+1}} = 1, \quad \boxed{u_{k+1,k+1}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{d_{k+1,k+1}} = \boxed{a_{k+1,k+1}} - \bar{l}_{k+1}^T \underset{\sim}{D}_k \ \bar{u}_{k+1}.$$

4. **Para** $k = 1$:

$$\underset{\sim}{A}_1 = \underset{\sim}{L}_1 \, \underset{\sim}{D}_1 \, \underset{\sim}{U}_1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{l_{11}} \; \boxed{d_{11}} \; \boxed{u_{11}} = \boxed{a_{11}}. \qquad (\star)$$

5. **Para** $k = n$:

$$\underset{\sim}{A}_n = \underset{\sim}{A} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L} \, \underset{\sim}{D} \, \underset{\sim}{U} \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}_n, \\ \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}_n, \\ \underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{U}_n. \end{cases}$$

$(\star)$ Hay infinitas descomposiciones posibles. Por convenio, se eligen (arbitrariamente) los valores:

$$\boxed{l_{11}} = 1, \quad \boxed{u_{11}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{d_{11}} = \boxed{a_{11}}.$$

REALIZACIÓN DE LOS CÁLCULOS

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ:

Asignar $\boxed{l_{11}} = 1, \ \boxed{u_{11}} = 1,$

$\boxed{d_{11}} = \boxed{a_{11}}.$

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Resolver} & \left[\underset{\sim}{L}_k \quad \underset{\sim}{D}_k \right] \boxed{\bar{u}_{k+1}} = \boxed{\bar{c}_{k+1}}, \\ & \left[{\underset{\sim}{U}_k}^T \underset{\sim}{D}_k \right] \boxed{\bar{l}_{k+1}} = \boxed{\bar{f}_{k+1}}. \\ \text{Asignar} & \boxed{l_{k+1,k+1}} = 1, \ \boxed{u_{k+1,k+1}} = 1, \\ & \boxed{d_{k+1,k+1}} = \boxed{a_{k+1,k+1}} - \bar{l}_{k+1}^T \underset{\sim}{D}_k \, \bar{u}_{k+1}. \end{array} \right.$$

Notas:

1. Los sistemas $[\underset{\sim}{L}_k \, \underset{\sim}{D}_k] \; \bar{u}_{k+1} \; = \; \bar{c}_{k+1}$ se resuelven en dos fases:

$$\underset{\sim}{L}_k \; \overbrace{\underset{\sim}{D}_k \; \bar{u}_{k+1}}^{\bar{v}_{k+1}} \; = \; \bar{c}_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \underset{\sim}{L}_k \; \bar{v}_{k+1} = \bar{c}_{k+1}, \\ \qquad\qquad \searrow \\ \underset{\sim}{D}_k \; \bar{u}_{k+1} = \bar{v}_{k+1}. \end{cases}$$

2. Los sistemas $[\underset{\sim}{U}_k^T \, \underset{\sim}{D}_k] \; \bar{l}_{k+1} \; = \; \bar{f}_{k+1}$ se resuelven en dos fases:

$$\underset{\sim}{U}_k^T \; \overbrace{\underset{\sim}{D}_k \; \bar{l}_{k+1}}^{\bar{m}_{k+1}} \; = \; \bar{f}_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \underset{\sim}{U}_k^T \; \bar{m}_{k+1} = \bar{f}_{k+1}, \\ \qquad\qquad \searrow \\ \underset{\sim}{D}_k \; \bar{l}_{k+1} = \bar{m}_{k+1}. \end{cases}$$

REALIZACIÓN DE LOS CÁLCULOS (continuación)

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS:

Resolver
$$\underset{\sim}{L}\ \bar{z} = \bar{b},$$
$$\underset{\sim}{D}\ \bar{y} = \bar{z},$$
$$\underset{\sim}{U}\ \bar{x} = \bar{y}.$$

CONDICIONES DE EXISTENCIA

Por construcción (unos en la diagonal principal), se cumple

$$\det(\underset{\sim}{L}_k) = \det(\underset{\sim}{U}_k) = 1 \qquad \text{para} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Por tanto, basta con que se cumplan las condiciones

$$\begin{cases} \det(\underset{\sim}{D}_k) \neq 0,\ k = 1, \ldots, n-1 & \text{para que pueda realizarse la factorización,} \\ \det(\underset{\sim}{D}_k) \neq 0,\ k = n & \text{para que pueda realizarse la solución de sistemas.} \end{cases}$$

Por otro lado,

$$\underset{\sim}{A}_k = \underset{\sim}{L}_k\, \underset{\sim}{D}_k\, \underset{\sim}{U}_k \implies \det(\underset{\sim}{A}_k) = \det(\underset{\sim}{L}_k)\, \det(\underset{\sim}{D}_k)\, \det(\underset{\sim}{U}_k) = \det(\underset{\sim}{D}_k)\ \forall k.$$

Luego, las condiciones de existencia pueden expresarse en la forma

$$\boxed{\begin{cases} \det(\underset{\sim}{A}_k) \neq 0,\ k = 1, \ldots, n-1 & \text{para que pueda realizarse la factorización,} \\ \det(\underset{\sim}{A}_k) \neq 0,\ k = n & \text{para que pueda realizarse la solución de sistemas.} \end{cases}}$$

En general, podemos afirmar que:

♡ Si la matriz es **REGULAR** $\left[\det(\underset{\sim}{A}) \neq 0\right]\ldots$

- puede pasar que la factorización exista; $(\star)$
- puede pasar que la factorización **NO** exista; $(\star\star)$
- es prácticamente imposible comprobar *a priori* la condición de existencia anterior;
- es sencillo (y RECOMENDABLE en todo caso) comprobar sobre la marcha que

$$d_{11} \neq 0, \qquad d_{k+1,k+1} \neq 0 \ \text{ para } \ k = 1, \ldots, n.$$

♠ Aunque la matriz sea **SINGULAR** $\left[\det(\underset{\sim}{A}) = 0\right]\ldots$

- puede pasar que la factorización exista; $(\star)$
- pero no se podrá utilizar para resolver el sistema. $(\star\star\star)$

$(\star)$ Esto sucederá cuando $\det(\underset{\sim}{A}_k) \neq 0, \ k = 1, \ldots, n-1$.

$(\star\star)$ Esto sucederá cuando no se cumpla la condición anterior. Por ejemplo, cuando $a_{11} = 0$.
Al igual que en el Método de Gauss, estos casos requieren **PIVOTAMIENTO** (intercambio de filas y/o columnas).
El problema es que el pivotamiento casa mal con los almacenamientos en banda y en perfil.

$(\star\star\star)$ Porque el sistema no tiene solución y el algoritmo fallará al resolver $\underset{\sim}{D}\ \bar{y} = \bar{z}$.

Un caso importante es el de las **MATRICES DEFINIDAS**:

$$\boxed{\underset{\sim}{A} \quad \text{DEFINIDA} \quad \Longrightarrow \quad \det(\underset{\sim}{A}_k) \neq 0, \quad k = 1, \ldots, n.}$$

Luego, si $\underset{\sim}{A}$ es **DEFINIDA** (positiva o negativa)

- ◇ puede realizarse la factorización y
- ◇ puede realizarse la solución de sistemas.

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ:

$$l_{11} = 1, \quad u_{11} = 1$$

$$d_{11} = a_{11}$$

```
DO k=1,n-1
```

$$u_{i,k+1} = a_{i,k+1} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{j,k+1} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$u_{i,k+1} = u_{i,k+1} \,/\, d_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$l_{k+1,i} = a_{k+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} u_{ji}\, l_{k+1,j} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$l_{k+1,i} = l_{k+1,i} \,/\, d_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$l_{k+1,k+1} = 1, \quad u_{k+1,k+1} = 1$$

$$d_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - \sum_{j=1}^{k} l_{k+1,j}\, d_{jj}\, u_{j,k+1}$$

```
ENDDO
```

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: (⋆)

$$z_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, z_j \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$y_i = z_i \,/\, d_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij}\, x_j \qquad ;\ i = n, \ldots, 1, -1$$

(⋆) Este planteamiento es adecuado para matrices en banda pero inadecuado para matrices en perfil debido a que el bucle interno de la última expresión (sumatorio) barre la matriz $\underset{\sim}{U}$ por filas.

FACTORIZACIÓN DE CROUT: Algoritmos (III)

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: [Planteamiento Alternativo] $(\ast)$

$$z_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, z_j \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$y_i = z_i \,/\, d_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$x_i = y_i \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$x_j = x_j - \quad u_{ji}\, x_i \qquad ;\ j = 1, \ldots, i-1 \qquad ;\ i = n, \ldots, 2, -1$$

$(\ast)$ Este planteamiento es adecuado para matrices en banda y también para matrices en perfil. Obsérvese que el bucle interno de la última expresión barre ahora la matriz $\underset{\sim}{U}$ por columnas.

Es fácil comprobar que

- podemos almacenar $\underset{\sim}{L}$, $\underset{\sim}{D}$ y $\underset{\sim}{U}$ sobre $\underset{\sim}{A}$;
- podemos almacenar $\bar{z}$, $\bar{y}$ y $\bar{x}$ sobre $\bar{b}$;

Así...

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{bmatrix} d_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & d_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & d_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}.$$

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ:

```
DO k=1,n-1
```

$$a_{i,k+1} \leftarrow a_{i,k+1} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, a_{j,k+1} \quad ; \; i = 2, \ldots, k$$

$$a_{i,k+1} \leftarrow a_{i,k+1} \;/\; a_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$a_{k+1,i} \leftarrow a_{k+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ji}\, a_{k+1,j} \quad ; \; i = 2, \ldots, k$$

$$a_{k+1,i} \leftarrow a_{k+1,i} \;/\; a_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$a_{k+1,k+1} \leftarrow a_{k+1,k+1} - \sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j}\, a_{jj}\, a_{j,k+1}$$

```
ENDDO
```

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: ($\star$)

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, b_j \qquad ;\ i = 2, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i \;/\; a_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, b_j \qquad ;\ i = n-1, \ldots, 1, -1$$

($\star$) Este planteamiento es adecuado para matrices en banda pero inadecuado para matrices en perfil debido a que el bucle interno de la última expresión (sumatorio) barre la parte superior de la matriz $\underset{\sim}{A}$ por filas.

FACTORIZACIÓN DE CROUT: Programación (III)

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: [Planteamiento Alternativo] $(\ast)$

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, b_j \qquad ; \; i = 2, \ldots, n$$

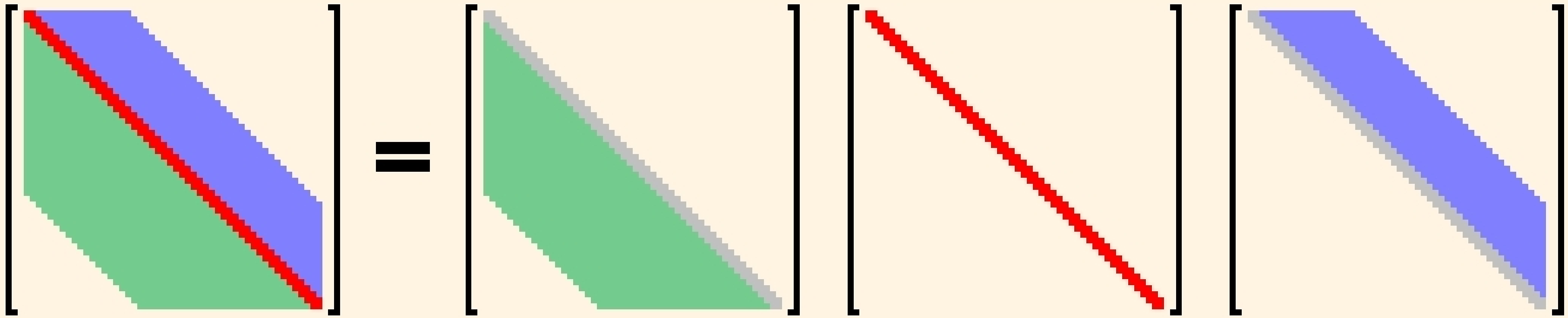
$$b_i \leftarrow b_i \,/\, a_{ii} \qquad ; \; i = 1, \ldots, n$$

$$b_j \leftarrow b_j - \qquad a_{ji}\, b_i \qquad ; \; j = 1, \ldots, i-1 \qquad ; \; i = n, \ldots, 2, -1$$

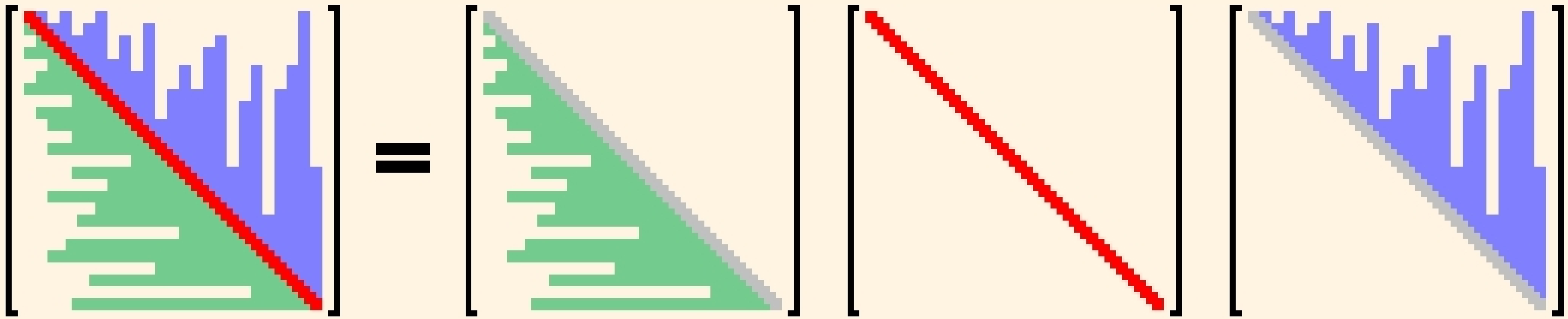
$(\ast)$ Este planteamiento es adecuado para matrices en banda y también para matrices en perfil.
Obsérvese que el bucle interno de la última expresión barre ahora la parte superior de la matriz $\underset{\sim}{A}$ por columnas.

FACTORIZACIÓN DE CROUT: Adaptación a Banda y Perfil (I)

Se conservan los semianchos de banda inferior y superior:



Se conservan los perfiles inferior (por filas) y superior (por columnas):



FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY [$\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{L}^T$, $\underset{\sim}{A}$ simétrica]

Sea el problema

$$\boxed{\underset{\sim}{A}\,\bar{x} = \bar{b}} \quad \text{con} \quad \underset{\sim}{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \textit{Sim.} & & & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}.$$

La **FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY** consiste en:

$$\boxed{\underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{D}\,\underset{\sim}{L}^T} \Longrightarrow \underset{\sim}{L}\,\overbrace{\underset{\sim}{D}\,\underbrace{\underset{\sim}{L}^T\,\bar{x}}_{\bar{y}}}^{\bar{z}} = \bar{b} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underset{\sim}{L}\,\bar{z} = \bar{b}, \\ \quad\searrow \\ \underset{\sim}{D}\,\bar{y} = \bar{z}, \\ \quad\searrow \\ \underset{\sim}{L}^T\bar{x} = \bar{y}. \end{array} \right.$$

FUNCIONAMIENTO DEL MÉTODO

Observamos que es un caso particular de la **Factorización de CROUT** para matrices simétricas en el que

$$\underset{\sim}{U} = \underset{\sim}{L}^T.$$

Debido a la simetría se cumplirá

$$\begin{cases} \boxed{\bar{c}_{k+1}} = \boxed{\bar{f}_{k+1}}, \\ \underset{\sim}{U}_k = \underset{\sim}{L}_k^T, \\ \boxed{\bar{u}_{k+1}} = \boxed{\bar{l}_{k+1}}, \\ \boxed{u_{k+1,k+1}} = \boxed{l_{k+1,k+1}}. \end{cases}$$

Por tanto ...

1-2. **El vector $\bar{l}_{k+1}$ es la solucíón del sistema**:

$$[\underset{\sim}{L}_k \ \underset{\sim}{D}_k] \ \boxed{\bar{l}_{k+1}} = \boxed{\bar{f}_{k+1}}.$$

3. **Los coeficientes $l_{k+1,k+1}$ y $d_{k+1,k+1}$ verifican**:

$$\boxed{l_{k+1,k+1}} \ \boxed{d_{k+1,k+1}} \ \boxed{l_{k+1,k+1}} = \boxed{a_{k+1,k+1}} - \bar{l}_{k+1}^{T} \underset{\sim}{D}_k \ \bar{l}_{k+1}. \qquad (\star)$$

$(\star)$ Donde $\bar{l}_{k+1}$ se habrá calculado previamente.
Hay infinitas descomposiciones posibles. Por convenio, se eligen (arbitrariamente) los valores:

$$\boxed{l_{k+1,k+1}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{d_{k+1,k+1}} = \boxed{a_{k+1,k+1}} - \bar{l}_{k+1}^{T} \underset{\sim}{D}_k \ \bar{l}_{k+1}.$$

4. **Para** $k = 1$:

$$\underset{\sim}{A}_1 = \underset{\sim}{L}_1 \, \underset{\sim}{D}_1 \, \underset{\sim}{L}_1^T \quad \Longrightarrow \quad \boxed{l_{11}} \, \boxed{d_{11}} \, \boxed{l_{11}} = \boxed{a_{11}}. \qquad (\star)$$

5. **Para** $k = n$:

$$\underset{\sim}{A}_n = \underset{\sim}{A} \quad \Longrightarrow \quad \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{L} \, \underset{\sim}{D} \, \underset{\sim}{L}^T \quad \text{con} \quad \begin{cases} \underset{\sim}{L} = \underset{\sim}{L}_n, \\ \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{D}_n. \end{cases}$$

$(\star)$ Hay infinitas descomposiciones posibles. Por convenio, se eligen (arbitrariamente) los valores:

$$\boxed{l_{11}} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{d_{11}} = \boxed{a_{11}}.$$

REALIZACIÓN DE LOS CÁLCULOS

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ:

Asignar $l_{11} = 1,$

$d_{11} = a_{11}.$

Para $k = 1, \ldots, n-1$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Resolver} & [\underset{\sim}{L}_k \quad \underset{\sim}{D}_k]\, \bar{l}_{k+1} = \bar{f}_{k+1}. \\ \text{Asignar} & l_{k+1,k+1} = 1, \\ & d_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - \bar{l}^T_{k+1} \underset{\sim}{D}_k\, \bar{l}_{k+1}. \end{array} \right.$$

Notas:

1. Los sistemas $[\underset{\sim}{L}_k \; \underset{\sim}{D}_k] \; \bar{l}_{k+1} = \bar{f}_{k+1}$ se resuelven en dos fases:

$$\underset{\sim}{L}_k \; \overbrace{\underset{\sim}{D}_k \; \bar{l}_{k+1}}^{\bar{m}_{k+1}} = \bar{f}_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \underset{\sim}{L}_k \; \bar{m}_{k+1} = \bar{f}_{k+1}, \\ \qquad\qquad\quad \searrow \\ \underset{\sim}{D}_k \; \bar{l}_{k+1} = \bar{m}_{k+1}. \end{cases}$$

REALIZACIÓN DE LOS CÁLCULOS (continuación)

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS:

Resolver
$$\begin{aligned} \underset{\sim}{L}\ \boxed{\bar{z}} &= \boxed{\bar{b}}\,, \\ \underset{\sim}{D}\ \boxed{\bar{y}} &= \boxed{\bar{z}}\,, \\ \underset{\sim}{L}^T\ \boxed{\bar{x}} &= \boxed{\bar{y}}\,. \end{aligned}$$

CONDICIONES DE EXISTENCIA

Son las mismas que en el caso de la **Factorización de CROUT**.

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ:

$$l_{11} = 1,$$

$$d_{11} = a_{11}$$

```
DO k=1,n-1
```

$$l_{k+1,i} = a_{k+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, l_{k+1,j} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$l_{k+1,i} = l_{k+1,i} \,/\, d_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$l_{k+1,k+1} = 1,$$

$$d_{k+1,k+1} = a_{k+1,k+1} - \sum_{j=1}^{k} l_{k+1,j}\, d_{jj}\, l_{k+1,j}$$

```
ENDDO
```

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: $(\star)$

$$z_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, z_j \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$y_i = z_i \,/\, d_{ii} \qquad ;\ i = 1, \ldots, n$$

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} l_{ji}\, x_j \qquad ;\ i = n, \ldots, 1, -1$$

$(\star)$ Este planteamiento es adecuado para matrices en banda pero inadecuado para matrices en perfil debido a que el bucle interno de la última expresión (sumatorio) barre la matriz $\underset{\sim}{L}$ por columnas.

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: [Planteamiento Alternativo] $(\star)$

$$z_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, z_j \qquad ; \ i = 1, \ldots, n$$

$$y_i = z_i \,/\, d_{ii} \qquad ; \ i = 1, \ldots, n$$

$$x_i = y_i \qquad ; \ i = 1, \ldots, n$$

$$x_j = x_j - \qquad l_{ij}\, x_i \qquad ; \ j = 1, \ldots, i-1 \qquad ; \ i = n, \ldots, 2, -1$$

$(\star)$ Este planteamiento es adecuado para matrices en banda y también para matrices en perfil. Obsérvese que el bucle interno de la última expresión barre ahora la matriz $\underset{\sim}{L}$ por filas.

Es fácil comprobar que

- podemos almacenar $\underset{\sim}{L}$ Y $\underset{\sim}{D}$ sobre la parte inferior de $\underset{\sim}{A}$;
- podemos almacenar $\bar{z}$, $\bar{y}$ y $\bar{x}$ sobre $\bar{b}$;

Así...

$$\begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{bmatrix} d_{11} & & & & \\ l_{21} & d_{22} & & & \\ l_{31} & l_{32} & d_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{se transformará en}} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}.$$

1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ:

```
DO k=1,n-1
```

$$a_{k+1,i} \leftarrow a_{k+1,i} - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, a_{k+1,j} \quad ; \; i = 2, \ldots, k$$

$$a_{k+1,i} \leftarrow a_{k+1,i} \; / \; a_{ii} \quad ; \; i = 1, \ldots, k$$

$$a_{k+1,k+1} \leftarrow a_{k+1,k+1} - \sum_{j=1}^{k} a_{k+1,j}\, a_{jj}\, a_{k+1,j}$$

```
ENDDO
```

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: ($\star$)

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, b_j \qquad ; \; i = 2, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i \,/\, a_{ii} \qquad ; \; i = 1, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ji}\, b_j \qquad ; \; i = n-1, \ldots, 1, -1$$

($\star$) Este planteamiento es adecuado para matrices en banda pero inadecuado para matrices en perfil debido a que el bucle interno de la última expresión (sumatorio) barre la parte inferior de la matriz $\underset{\sim}{A}$ por columnas.

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: [Planteamiento Alternativo] ($\star$)

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, b_j \qquad ;\; i = 2, \ldots, n$$

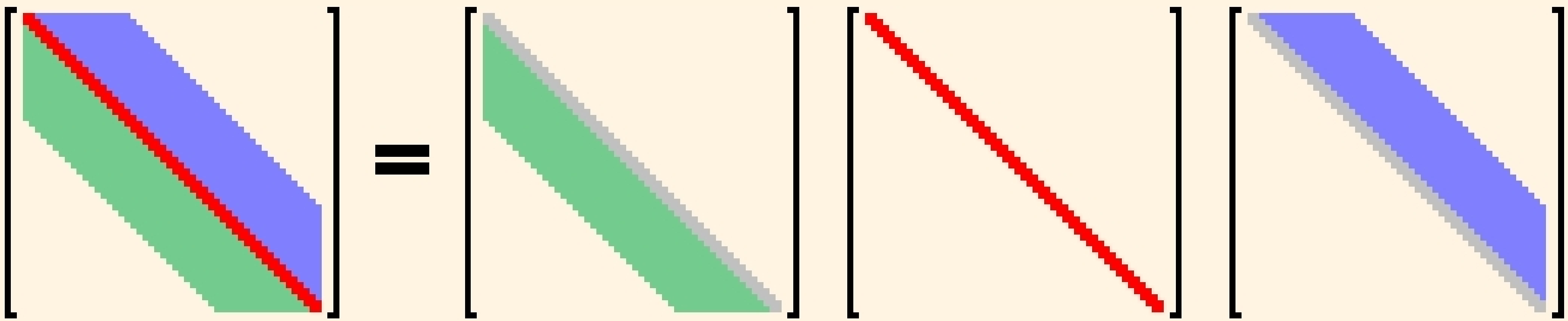
$$b_i \leftarrow b_i \;/\; a_{ii} \qquad ;\; i = 1, \ldots, n$$

$$b_j \leftarrow b_j - \qquad a_{ij}\, b_i \qquad ;\; j = 1, \ldots, i-1 \qquad ;\; i = n, \ldots, 2, -1$$

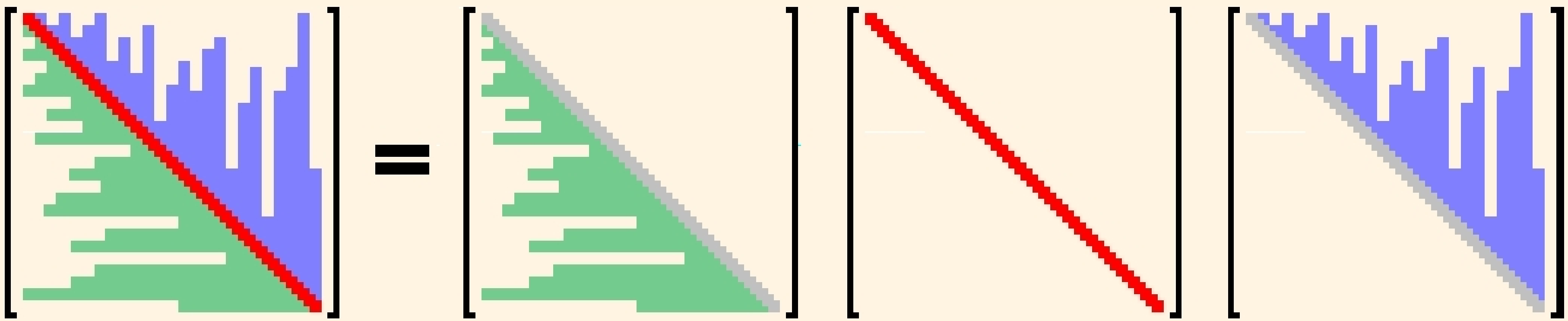
($\star$) Este planteamiento es adecuado para matrices en banda y también para matrices en perfil.
Obsérvese que el bucle interno de la última expresión barre ahora la parte inferior de la matriz $\underset{\sim}{A}$ por filas.

FACTORIZACIÓN DE CHOLESKY: Adaptación a Banda y Perfil (I)

Se conservan los semianchos de banda inferior y superior:



Se conservan los perfiles inferior (por filas) y superior (por columnas):



1. FACTORIZACIÓN DE LA MATRIZ: ($\star$)

```
DO k=1,n-1
```

$$a_{k+1,i} \leftarrow a_{k+1,i} - \sum_{j=\max\{i-\ell(i),(k+1)-\ell(k+1)\}}^{i-1} a_{ij}\, a_{k+1,j} \quad ; \; i = \big[(k+1)-\ell(k+1)+1\big], \ldots, k$$

$$a_{k+1,i} \leftarrow a_{k+1,i} \; / \; a_{ii} \quad ; \; i = \big[(k+1)-\ell(k+1)\big], \ldots, k$$

$$a_{k+1,k+1} \leftarrow a_{k+1,k+1} - \sum_{j=(k+1)-\ell(k+1)}^{k} a_{k+1,j}\, a_{jj}\, a_{k+1,j}$$

```
ENDDO
```

($\star$) $\ell(i)$ es el semiancho de banda inferior de la fila i.
Este valor indica que el primer elemento no nulo de la fila i es el coeficiente $a_{i,i-\ell(i)}$.

2. SOLUCIÓN DE SISTEMAS: ($\star$)

$$b_i \leftarrow b_i - \sum_{j=i-\ell(i)}^{i-1} a_{ij}\, b_j \qquad ;\; i = 2, \ldots, n$$

$$b_i \leftarrow b_i \,/\, a_{ii} \qquad ;\; i = 1, \ldots, n$$

$$b_j \leftarrow b_j - a_{ij}\, b_i \qquad ;\; j = [i-\ell(i)], \ldots, i-1 \quad ;\; i = n, \ldots, 2, -1$$

($\star$) $\ell(i)$ es el semiancho de banda inferior de la fila i.
Este valor indica que el primer elemento no nulo de la fila i es el coeficiente $a_{i,i-\ell(i)}$.