

MÉTODO DE EULER

1. Fundamento del Método

El objetivo es desarrollar un algoritmo numérico para resolver el problema de valores iniciales

$$y'(x) = \varphi(x, y), \quad y(a) = y_a; \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

siendo $\varphi(x, y)$ una función acotada, continua en la variable x y *lipschitziana* en la variable y en el dominio $[a, b]$.

Considérese en principio el dominio $[a, b]$ discretizado en $n + 1$ puntos equiespaciados:

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, n; \quad x_0 = a \quad (2)$$

siendo el espaciado h

$$h = \frac{b - a}{n} \quad (3)$$

El punto de partida lo constituye el desarrollo en Serie de Taylor de la función $y(x)$ en el punto x_{i+1} de la discretización del dominio

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \dots \quad (4)$$

esto es, dado que $x_{i+1} = x_i + h$

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)h + \Theta(h^2) \quad (5)$$

donde $\Theta(h^2)$ denota los restantes términos del desarrollo en serie que dependen del factor h^2 y/o de potencias superiores de h^2 . Si en esta expresión se despeja la derivada primera:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \Theta(h) \quad (6)$$

y restando en ambos miembros $\varphi(x_i, y(x_i))$ resulta

$$y'(x_i) - \varphi(x_i, y(x_i)) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \varphi(x_i, y(x_i)) - \Theta(h). \quad (7)$$

Si a continuación se impone que se satisfaga la ecuación diferencial en cada punto x_i , esto es,

$$y'(x_i) - \varphi(x_i, y(x_i)) = 0, \quad i = 1, n \quad (8)$$

resulta que debe satisfacerse

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \varphi(x_i, y(x_i)) - \Theta(h) = 0, \quad i = 1, n. \quad (9)$$

El término $-\Theta(h)$ es el “**Error de Truncamiento Local del Algoritmo**” y se denota como $\tau_i(h)$. A la vista de la dependencia del orden con h podemos afirmar que el Método de Euler es de **primer orden**.

La expresión (9) es equivalente a

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\varphi(x_i, y(x_i)) + h\tau_i(h), \quad i = 0, n. \quad (10)$$

El **algoritmo del Método de Euler** consiste en obtener una aproximación a la solución a la ecuación (10) al considerar $\tau_i(h) = 0$, resultando

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_i + h\varphi(x_i, \hat{y}_i), \quad i = 0, n; \quad \hat{y}_0 = y_a \quad (11)$$

2. Consistencia del Método

El Método de Euler es **consistente** ya que, cuando el tamaño de la discretización h tiende a 0, el error local de truncamiento ($\tau_i(h) = -\Theta(h)$) también tiende a cero, es decir,

$$\tau_i(h) \rightarrow 0 \quad \text{cuando } h \rightarrow 0, \quad \forall i = 0, n. \quad (12)$$

3. Convergencia del Método

Vamos a analizar el “Error Global de Truncamiento” o “Error Discretización” (e_i^T), esto es la diferencia entre la solución analítica y la solución aproximada que proporciona el algoritmo de Euler dado por (11).

Denotaremos por z_i al error de truncamiento e_i^T como

$$e_i^T \equiv z_i = y(x_i) - \hat{y}_i \quad (13)$$

Si se restan las expresiones (10) y (11) obtenemos

$$z_{i+1} = z_i + h(\varphi(x_i, y(x_i)) - \varphi(x_i, \hat{y}_i)) + h\tau_i(h), \quad i = 0, n. \quad (14)$$

Dado que $h > 0$, si tomamos valores absolutos en los dos miembros, resulta

$$\begin{aligned} |z_{i+1}| &= |z_i + h(\varphi(x_i, y(x_i)) - \varphi(x_i, \hat{y}_i)) + h\tau_i(h)| \\ &\leq |z_i| + h|\varphi(x_i, y(x_i)) - \varphi(x_i, \hat{y}_i)| + h|\tau_i(h)|, \quad i = 0, n. \end{aligned} \quad (15)$$

Dado que la función $\varphi(x, y)$ es, por hipótesis, *lipschitziana* en y , es decir

$$\exists k > 0 \text{ tal que } |\varphi(x_i, y(x_i)) - \varphi(x_i, \hat{y}_i)| \leq k|y(x_i) - \hat{y}_i| = k|z_i|, \quad \forall i, \quad (16)$$

entonces (15) puede escribirse como

$$|z_{i+1}| \leq (1 + hk)|z_i| + h|\tau_i(h)|, \quad i = 0, n. \quad (17)$$

Denominemos $\tau(h)$ al mayor de los errores de truncamiento locales, esto es

$$\tau(h) = \max|\tau_i(h)|, \quad i = 0, n. \quad (18)$$

Si la igualdad (17) se aplica de forma recursiva para los valores de $i, i - 1$, y así hasta 0 se obtiene

$$\begin{aligned} |z_{i+1}| &\leq (1 + hk)|z_i| + h\tau(h) \\ &\leq (1 + hk)^2|z_{i-1}| + (1 + hk)h\tau(h) + h\tau(h) \\ &\dots \\ &\leq (1 + hk)^{i+1}|z_0| + (1 + (1 + hk) + \dots + (1 + hk)^i)h\tau(h) \end{aligned} \quad (19)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |z_{i+1}| &\leq (1 + hk)^{i+1}|z_0| + \frac{1 - (1 + hk)^{i+1}}{1 - (1 + hk)}h\tau(h) \\ &\leq (1 + hk)^{i+1}|z_0| + \frac{(1 + hk)^{i+1}}{k}\tau(h) \\ &\leq (1 + hk)^{i+1} \left(|z_0| + \frac{\tau(h)}{k} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

Por otra parte, si tenemos en cuenta que el error inicial ($z_0 = y(x_0) - \hat{y}_0$) es nulo ya que $y(x_0) = y_a$ y $\hat{y}_0 = y_a$, y que se verifica la desigualdad

$$0 \leq (1 + \xi)^n \leq e^{n\xi}, \quad \forall \xi \geq 0, n \geq 0, \quad (21)$$

entonces la cota superior del error de truncamiento global del método de Euler es

$$|z_{i+1}| \leq \frac{\tau(h)}{k} e^{(i+1)hk} \quad (22)$$

A la vista del resultado anterior, es obvio que el error global de truncamiento del método tiende a 0 cuando el tamaño de la discretización h tiende a 0, esto es,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |z_{i+1}| = 0, \quad (23)$$

por lo que podemos concluir que el método de Euler es **convergente**.

4. Estabilidad del Método

Vamos a analizar seguidamente la estabilidad del método de Euler, esto es el comportamiento de la solución numérica del mismo cuando se perturba el valor de la condición inicial.

Para ello consideraremos el algoritmo (11) y el algoritmo del método de Euler variando en un valor ε la condición inicial

$$\widehat{\psi}_{i+1} = \widehat{\psi}_i + h\varphi(x_i, \widehat{\psi}_i), \quad i = 0, n; \quad \widehat{\psi}_0 = y_a + \varepsilon \quad (24)$$

y analizaremos el error $z_i = \widehat{y}_i - \widehat{\psi}_i$ que se produce.

Si restamos las expresiones de los algoritmos (11) y (24) se obtiene

$$z_{i+1} = z_i + h(\varphi(x_i, \widehat{y}_i) - \varphi(x_i, \widehat{\psi}_i)), \quad i = 0, n; \quad z_0 = -\varepsilon \quad (25)$$

que tomando valores absolutos, resulta

$$|z_{i+1}| \leq |z_i| + h|\varphi(x_i, \widehat{y}_i) - \varphi(x_i, \widehat{\psi}_i)|, \quad i = 0, n; \quad |z_0| = |\varepsilon|. \quad (26)$$

Dado que la función $\varphi(x, y)$ es *lipschitziana*, es decir,

$$\exists k > 0 \text{ tal que } |\varphi(x_i, \widehat{y}_i) - \varphi(x_i, \widehat{\psi}_i)| \leq k|\widehat{y}_i - \widehat{\psi}_i| = k|z_i|, \quad \forall i, \quad (27)$$

entonces

$$|z_{i+1}| \leq |z_i|(1 + hk), \quad i = 0, n \quad (28)$$

desigualdad que, aplicada de forma recursiva, conduce a

$$|z_{i+1}| \leq (1 + hk)|z_i| \leq (1 + hk)^2|z_{i-1}| \leq \dots \leq (1 + hk)^{i+1}|z_0| \quad (29)$$

y en consecuencia a

$$|z_{i+1}| \leq (1 + hk)^{i+1}\varepsilon. \quad (30)$$

Teniendo en cuenta ahora la desigualdad (21), resulta que la cota superior del error que se comete en la solución numérica cuando se perturba la condición inicial es

$$|z_{i+1}| \leq \varepsilon e^{(i+1)hk}. \quad (31)$$

A la vista del resultado anterior, es obvio que el mayor error que se comete está acotado cuando el tamaño de la discretización h tiende a 0, esto es

$$\lim_{h \rightarrow 0} |z_{i+1}| = \varepsilon, \quad (32)$$

por lo que podemos concluir que el método de Euler es **estable**.

5. Convergencia del Método cuando se consideran los errores de redondeo en los cálculos

A continuación, se analiza la evolución del error (z_i) que se comete cuando se compara la solución **analítica exacta** $y(x_i)$ que se obtendría de (10) (si fuese posible hallarla)

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\varphi(x_i, y(x_i)) + h\tau_i(h), \quad i = 0, n; \quad y(x_0) = y_a \quad (33)$$

con la que solución **aproximada inexacta** (y_i) que proporciona el método de Euler si se considera que los cálculos se realizan en un ordenador y se producen, por tanto, errores de redondeo (ρ_i) en las operaciones, es decir,

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i) + \rho_{i+1}, \quad i = 0, n; \quad y_0 = y_a + \rho_0. \quad (34)$$

Denominaremos z_i al error cometido $z_i = y(x_i) - y_i$. Restando las expresiones (33) y (34), resulta

$$z_{i+1} = z_i + h(\varphi(x_i, y(x_i)) - \varphi(x_i, y_i)) + h\tau_i(h) - \rho_{i+1}, \quad i = 0, n; \quad z_0 = -\rho_0, \quad (35)$$

y tomando valores absolutos

$$|z_{i+1}| \leq |z_i| + h|\varphi(x_i, y(x_i)) - \varphi(x_i, y_i)| + h|\tau_i(h)| + |\rho_{i+1}|, \quad i = 0, n; \quad |z_0| = |\rho_0|. \quad (36)$$

Si llamamos $\tau(h)$ al mayor de los errores de truncamiento locales, y ρ al mayor de los errores de redondeo, esto es

$$\tau(h) = \max|\tau_i(h)|, \quad i = 0, n; \quad \rho = \max|\rho_i|, \quad i = 0, n; \quad (37)$$

y se tiene en cuenta que la función $\varphi(x, y)$ es *lipschitziana*:

$$\exists k > 0 \text{ tal que } |\varphi(x_i, y(x_i)) - \varphi(x_i, y_i)| \leq k|y(x_i) - y_i| = k|z_i|, \quad \forall i, \quad (38)$$

entonces

$$|z_{i+1}| \leq |z_i|(1 + hk) + (h\tau(h) + \rho), \quad i = 0, n; \quad |z_0| = |\rho_0| \leq \rho. \quad (39)$$

Si la igualdad (39) se aplica de forma recursiva para los valores de i , $i - 1$, y así hasta 0 se obtiene

$$\begin{aligned} |z_{i+1}| &\leq (1 + hk)|z_i| + (h\tau(h) + \rho) \\ &\leq (1 + hk)^2|z_{i-1}| + (1 + hk)(h\tau(h) + \rho) + (h\tau(h) + \rho) \\ &\dots \\ &\leq (1 + hk)^{i+1}|z_0| + (1 + (1 + hk) + \dots + (1 + hk)^i)(h\tau(h) + \rho) \end{aligned} \quad (40)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} |z_{i+1}| &\leq (1 + hk)^{i+1}|z_0| + \frac{1 - (1 + hk)^{i+1}}{1 - (1 + hk)}(h\tau(h) + \rho) \\ &\leq (1 + hk)^{i+1}|z_0| + \frac{(1 + hk)^{i+1}}{hk}(h\tau(h) + \rho) \\ &\leq (1 + hk)^{i+1} \left(|z_0| + \frac{(h\tau(h) + \rho)}{hk} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

Además, ya que $|z_0| \leq \rho$:

$$|z_{i+1}| \leq (1 + hk)^{i+1} \left[\frac{\tau(h)}{k} + \rho \left(1 + \frac{1}{hk} \right) \right] \quad (42)$$

y dado que se satisface la desigualdad (21), se obtiene finalmente

$$|z_{i+1}| \leq e^{(i+1)hk} \left[\frac{\tau(h)}{k} + \rho \left(1 + \frac{1}{hk} \right) \right]. \quad (43)$$

Como se puede observar el error entre la solución exacta analítica y la solución numérica inexacta se compone de dos sumandos: uno debido al error global de truncamiento ($\frac{\tau(h)}{k}$) que **disminuye** cuando el tamaño de la discretización h disminuye, y otro sumando ($\rho(1 + 1/hk)$) que **augmenta** cuando el tamaño de la discretización h disminuye.

En consecuencia, existe un valor del tamaño de discretización óptimo (h^*) en el que se produce el error total mínimo, y a partir del cual seguir disminuyendo el tamaño de la discretización conduce a errores en la solución numérica cada vez mayores debido a la propagación de los errores de redondeo.

MÉTODO DE DIFERENCIAS CENTRADAS

1. Fundamento del Método

Considérese en principio el dominio $[a, b]$ discretizado en $n + 1$ puntos equiespaciados tal como se ha presentado en (2) donde el espaciado h viene dado por (3).

El punto de partida se basa en combinar el desarrollo en Serie de Taylor de la función $y(x)$ en el punto $x_{i+1} = x_i + h$ de la discretización del dominio

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \dots \quad (44)$$

con el desarrollo en Serie de Taylor de la función $y(x)$ en el punto $x_{i-1} = x_i - h$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}(x_{i-1} - x_i)^3 + \dots \quad (45)$$

Restando ambas expresiones y teniendo en cuenta que $h = x_{i+1} - x_i$ y $h = x_i - x_{i-1}$, se obtiene

$$y(x_{i+1}) = y(x_{i-1}) + 2hy'(x_i) + \Theta(h^3) \quad (46)$$

donde $\Theta(h^3)$ denota los restantes términos del desarrollo en serie que dependen del factor h^3 y/o de potencias superiores de h^3 . Si en esta expresión se despeja la derivada primera:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \Theta(h^2) \quad (47)$$

y restando en ambos miembros $\varphi(x_i, y(x_i))$ resulta

$$y'(x_i) - \varphi(x_i, y(x_i)) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \varphi(x_i, y(x_i)) - \Theta(h^2). \quad (48)$$

Si a continuación se impone que se satisfaga la ecuación diferencial en cada punto x_i , esto es

$$y'(x_i) - \varphi(x_i, y(x_i)) = 0, \quad i = 1, n \quad (49)$$

resulta que debe satisfacerse

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} - \varphi(x_i, y(x_i)) - \Theta(h^2) = 0, \quad i = 1, n. \quad (50)$$

El término $-\Theta(h^2)$ es el “**Error de Truncamiento Local del Algoritmo**” y se denota como $\tau_i(h^2)$. A la vista de la dependencia del orden con h^2 podemos afirmar que el Método de Diferencias Centradas es de **segundo orden**.

La expresión (50) es equivalente a

$$y(x_{i+1}) = y(x_{i-1}) + 2h\varphi(x_i, y(x_i)) + 2h\tau_i(h^2), \quad i = 1, n. \quad (51)$$

El **algoritmo del Método de Diferencias Centradas** consiste en obtener una aproximación a la solución a la ecuación (51) al considerar $\tau_i(h^2) = 0$, resultando

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_{i-1} + 2h\varphi(x_i, \hat{y}_i), \quad i = 1, n. \quad (52)$$

Como puede verse el algoritmo de diferencias centradas precisa los valores de la función $y(x)$ en dos puntos (x_i y x_{i-1}) para obtener el valor de $y(x_{i+1})$. Por este motivo, establecida la condición inicial $\hat{y}_0 = y_a$, el valor de \hat{y}_1 debe obtenerse con otro método (por ejemplo, el método de Euler) y, a partir de ambos, determinar las restantes aproximaciones con (52), de modo que una versión completa del algoritmo podría ser

$$\hat{y}_{i+1} = \hat{y}_{i-1} + 2h\varphi(x_i, \hat{y}_i), \quad i = 1, n; \quad \hat{y}_0 = y_a; \quad \hat{y}_1 = \hat{y}_0 + h\varphi(x_0, \hat{y}_0) \quad (53)$$

2. Consistencia del Método

El Método de Diferencias Centradas es **consistente** ya que, cuando el tamaño de la discretización h tiende a 0, el error local de truncamiento ($\tau_i(h^2) = -\Theta(h^2)$) también tiende a cero.

3. Convergencia del Método

Vamos a analizar el “*Error Global de Truncamiento*” o “*Error Discretización*” (e_i^T), esto es la diferencia entre la solución analítica y la solución aproximada que proporciona el algoritmo de Diferencias Centradas dado por (53).

Denotaremos por z_i al error de truncamiento e_i^T como

$$e_i^T \equiv z_i = y(x_i) - \hat{y}_i \quad (54)$$

Si se restan las expresiones (51) y (53) obtenemos

$$z_{i+1} = z_{i-1} + 2h(\varphi(x_i, y(x_i)) - \varphi(x_i, \hat{y}_i)) + 2h\tau_i(h^2), \quad i = 1, n. \quad (55)$$

Dado que $h > 0$, si tomamos valores absolutos en los dos miembros, resulta

$$\begin{aligned} |z_{i+1}| &= |z_{i-1} + 2h(\varphi(x_i, y(x_i)) - \varphi(x_i, \hat{y}_i)) + 2h\tau_i(h^2)| \\ &\leq |z_{i-1}| + 2h|\varphi(x_i, y(x_i)) - \varphi(x_i, \hat{y}_i)| + 2h|\tau_i(h^2)|, \quad i = 1, n. \end{aligned} \quad (56)$$

Por otra parte, ya que la función $\varphi(x, y)$ es *lipschitziana* en y , es decir se verifica (16), entonces (56) puede escribirse como

$$|z_{i+1}| \leq |z_{i-1}| + 2hk|z_i| + 2h|\tau_i(h^2)|, \quad i = 1, n. \quad (57)$$

Denominemos $\tau(h^2)$ al mayor de los errores de truncamiento locales, esto es

$$\tau(h^2) = \max|\tau_i(h^2)|, \quad i = 1, n. \quad (58)$$

y denominemos $\tau_0(h)$ al error de truncamiento local cometido al aplicar el método de Euler en el cálculo de la aproximación \hat{y}_1 .

De este modo tendremos que en el cálculo de la primera aproximación por el método de Euler

$$\begin{aligned} |z_0| &= 0, \\ |z_1| &\leq (1 + hk)|z_0| + h\tau_0(h) = h\tau_0(h), \end{aligned} \quad (59)$$

y para las restantes aproximaciones, por la expresión (57), tendremos

$$\begin{aligned} |z_2| &\leq |z_0| + 2hk|z_1| + 2h\tau(h^2) \leq 2h^2k\tau_0(h) + 2h\tau(h^2) \\ |z_3| &\leq (1 + (2hk)^2)h\tau_0(h) + (1 + 2hk)2h\tau(h^2) \\ |z_4| &\leq 2hk(1 + 1 + (2hk)^2)h\tau_0(h) + (2 + 2hk(1 + 2hk))2h\tau(h^2) \end{aligned} \quad (60)$$

...

que se puede generalizar del siguiente modo

$$|z_{i+1}| \leq \left[(1 + 2hk)^{i+1} \left(h\tau_0(h) + \frac{2h\tau(h^2)}{2hk} \right) - \frac{2h\tau(h^2)}{2hk} \right] \leq (1 + 2hk)^{i+1} \left(h\tau_0(h) + \frac{\tau(h^2)}{k} \right). \quad (61)$$

Teniendo en cuenta ahora la desigualdad (21), la cota superior del error global de truncamiento del algoritmo de diferencias centradas con cálculo de la primera aproximación con el algoritmo de Euler es

$$|z_{i+1}| \leq e^{2hk(i+1)} \left(h\tau_0(h) + \frac{\tau(h^2)}{k} \right) \quad (62)$$

A la vista del resultado anterior, es obvio que el error global de truncamiento del método tiende a 0 cuando el tamaño de la discretización h tiende a 0, esto es,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |z_{i+1}| = 0, \quad (63)$$

por lo que podemos concluir que el método es **convergente**.

4. Estabilidad del Método

El método de diferencias centradas es **estable**. La demostración es análoga a la realizada para el método de Euler y se propone como ejercicio.

MÉTODO DE TERCER ORDEN (NO CONVERGENTE)

1. Fundamento del Método

Considérese en principio el dominio $[a, b]$ discretizado en $n + 1$ puntos equiespaciados tal como se ha presentado en (2) donde el espaciado h viene dado por (3).

El punto de partida se basa en el desarrollo en Serie de Taylor de la función $y(x)$ en el punto $x_{i+1} = x_i + h$ de la discretización del dominio

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}(x_{i+1} - x_i)^3 + \frac{y^{iv}(x_i)}{4!}(x_{i+1} - x_i)^4 + \dots \quad (64)$$

el desarrollo en Serie de Taylor de la función $y(x)$ en el punto $x_{i-1} = x_i - h$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i-1} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x_{i-1} - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}(x_{i-1} - x_i)^3 + \frac{y^{iv}(x_i)}{4!}(x_{i-1} - x_i)^4 + \dots \quad (65)$$

y el desarrollo en Serie de Taylor de la función $y(x)$ en el punto $x_{i-2} = x_i - 2h$

$$y(x_{i-2}) = y(x_i) + y'(x_i)(x_{i-2} - x_i) + \frac{y''(x_i)}{2!}(x_{i-2} - x_i)^2 + \frac{y'''(x_i)}{3!}(x_{i-2} - x_i)^3 + \frac{y^{iv}(x_i)}{4!}(x_{i-2} - x_i)^4 + \dots \quad (66)$$

Combinando de forma conveniente las tres expresiones anteriores y, teniendo en cuenta que $h = x_{i+1} - x_i$, $h = x_i - x_{i-1}$ y $2h = x_i - x_{i-2}$, se obtiene

$$y(x_{i-2}) - 6y(x_{i-1}) + 2y(x_{i+1}) = -3y(x_i) + 6hy'(x_i) + \Theta(h^4) \quad (67)$$

donde $\Theta(h^4)$ denota los restantes términos del desarrollo en serie que dependen del factor h^4 y/o de potencias superiores de h^4 . Si en esta expresión se despeja la derivada primera:

$$y'(x_i) = \frac{y(x_{i-2}) - 6y(x_{i-1}) + 2y(x_{i+1}) + 3y(x_i)}{6h} - \Theta(h^3) \quad (68)$$

y restando en ambos miembros $\varphi(x_i, y(x_i))$ resulta

$$y'(x_i) - \varphi(x_i, y(x_i)) = \frac{y(x_{i-2}) - 6y(x_{i-1}) + 2y(x_{i+1}) + 3y(x_i)}{6h} - \varphi(x_i, y(x_i)) - \Theta(h^3) \quad (69)$$

Si a continuación se impone que se satisfaga la ecuación diferencial en cada punto x_i , esto es

$$y'(x_i) - \varphi(x_i, y(x_i)) = 0, \quad i = 2, n \quad (70)$$

resulta que debe satisfacerse

$$\frac{y(x_{i-2}) - 6y(x_{i-1}) + 2y(x_{i+1}) + 3y(x_i)}{6h} - \varphi(x_i, y(x_i)) - \Theta(h^3) = 0, \quad i = 2, n. \quad (71)$$

El término $-\Theta(h^3)$ es el “**Error de Truncamiento Local del Algoritmo**” y se denota como $\tau_i(h^3)$. A la vista de la dependencia del orden con h^3 podemos afirmar que se trata de un método de **tercer orden**.

La expresión (71) es equivalente a

$$y(x_{i+1}) = -\frac{3}{2}y(x_i) + 3y(x_{i-1}) - \frac{1}{2}y(x_{i-2}) + 3h\varphi(x_i, y(x_i)) + 3h\tau_i(h^3), \quad i = 2, n. \quad (72)$$

Podemos ahora desarrollar un algoritmo numérico de tercer orden consistente en obtener una aproximación a la solución a la ecuación (72) al considerar $\tau_i(h^3) = 0$, resultando

$$\hat{y}_{i+1} = -\frac{3}{2}\hat{y}_i + 3\hat{y}_{i-1} - \frac{1}{2}\hat{y}_{i-2} + 3h\varphi(x_i, \hat{y}_i), \quad i = 2, n. \quad (73)$$

Como puede verse este algoritmo de tercer orden precisa los valores de la función $y(x)$ en tres puntos (x_i, x_{i-1} y x_{i-2}) para obtener el valor de $y(x_{i+1})$. Por este motivo, establecida la condición inicial $\hat{y}_0 = y_a$, los valores de \hat{y}_1 y de \hat{y}_2 deben obtenerse con otro método (por ejemplo, el método de Euler o el de diferencias centradas) y, a partir de ambos, determinar las restantes aproximaciones con (73), de modo que una versión completa del algoritmo podría ser

$$\begin{aligned} \hat{y}_{i+1} &= -\frac{3}{2}\hat{y}_i + 3\hat{y}_{i-1} - \frac{1}{2}\hat{y}_{i-2} + 3h\varphi(x_i, \hat{y}_i), & i = 2, n; \\ \hat{y}_0 &= y_a; \\ \hat{y}_1 \text{ y } \hat{y}_2 &\text{ obtenidas con otros esquemas: Euler, diferencias centradas, etc.} \end{aligned} \quad (74)$$

2. Consistencia del Método

El método de tercer orden desarrollado es **consistente** ya que, cuando el tamaño de la discretización h tiende a 0, el error local de truncamiento ($\tau_i(h^3) = -\Theta(h^3)$) también tiende a cero.

3. Convergencia del Método

Vamos a analizar el “Error Global de Truncamiento” o “Error Discretización” (e_i^T), esto es la diferencia entre la solución analítica y la solución aproximada que proporciona el algoritmo de tercer orden dado por (74).

Denotaremos por z_i al error de truncamiento e_i^T como

$$e_i^T \equiv z_i = y(x_i) - \hat{y}_i \quad (75)$$

Si se restan las expresiones (72) y (74) obtenemos

$$z_{i+1} = -\frac{3}{2}z_i + 3z_{i-1} - \frac{1}{2}z_{i-2} + 3h(\varphi(x_i, y(x_i)) - \varphi(x_i, \hat{y}_i)) + 3h\tau_i(h^3), \quad i = 2, n. \quad (76)$$

Dado que $h > 0$, si tomamos valores absolutos en los dos miembros, y tenemos en cuenta que la función $\varphi(x, y)$ es *lipschitziana* en y (es decir se verifica (16)), resulta

$$|z_{i+1}| \leq \left(\frac{3}{2} + 3hk\right) |z_i| + 3|z_{i-1}| + \frac{1}{2}|z_{i-2}| + 3h|\tau_i(h^3)|, \quad i = 2, n. \quad (77)$$

Denominemos $\tau(h^3)$ al mayor de los errores de truncamiento locales, esto es

$$\tau(h^3) = \max|\tau_i(h^3)|, \quad i = 2, n; \quad (78)$$

y definamos los valores α_0 y α_i como

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \max(|z_0|, |z_1|, |z_2|) \\ \alpha_{i+1} &= (5 + 3hk)\alpha_i + 3h\tau(h^3), \quad i = 2, n \end{aligned} \quad (79)$$

que verifica la siguiente desigualdad (se puede demostrar por inducción)

$$|z_i| \leq \alpha_i, \quad i = 2, n. \quad (80)$$

Por lo tanto la cota superior del error global de truncamiento vendrá dada por

$$\begin{aligned} |z_{i+1}| &\leq (5 + 3hk)\alpha_i + 3h\tau(h^3) \\ &\dots \\ &\leq (5 + 3hk)^{i+1}\alpha_0 + 3h \frac{1 - (5 + 3hk)^{i+1}}{1 - (5 + 3hk)} \tau(h^3) \\ &\leq (5 + 3hk)^{i+1} \left(\alpha_0 + \frac{3h}{4 + 3hk} \tau(h^3) \right) \end{aligned} \quad (81)$$

que, en virtud de la desigualdad (21), podemos acotar como

$$|z_{i+1}| \leq 5^{i+1} e^{3hk(i+1)/5} \left(\alpha_0 + \frac{3h}{4 + 3hk} \tau(h^3) \right), \quad i = 2, n. \quad (82)$$

Obsérvese que, a diferencia de los métodos presentados anteriormente, ahora no puede asegurarse siempre que la cota superior del error global de truncamiento tienda a cero cuando el tamaño de la discretización h tiende a cero, ya que la expresión (82) es equivalente a

$$|z_{i+1}| \leq 5^{(x_{i+1}-x_0)/h} e^{3k(x_{i+1}-x_0)/5} \left(\alpha_0 + \frac{3h}{4 + 3hk} \tau(h^3) \right), \quad i = 2, n, \quad (83)$$

en la que puede verse fácilmente que el factor $5^{(x_{i+1}-x_0)/h}$ tiende a ∞ cuando $h \rightarrow 0$.

En conclusión, **no puede garantizarse la convergencia** de este método de tercer orden.

MÉTODOS DE INTERVALO SIMPLE

1. Planteamiento general de los métodos de intervalo simple

El planteamiento consiste en desarrollar esquemas numéricos de la forma general

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h\Phi(x_i, y(x_i)) + h\tau_i \quad (84)$$

para resolver el problema de valores iniciales

$$y'(x) = \varphi(x, y), \quad y(a) = y_a; \quad x \in [a, b] \quad (85)$$

siendo $\varphi(x, y)$ una función acotada, continua en la variable x y *lipschitziana* en la variable y en el dominio $[a, b]$.

El **objetivo** es obtener la función $\Phi(x, y)$ de (84) de modo que el error local de truncamiento τ_i dependa de h^p siendo el orden $p > 1$. Esto es, se trata de obtener la función $\Phi(x, y)$ que proporcione el mayor orden de la función τ_i

$$\tau_i = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} - \Phi(x_i, y(x_i)) \quad (86)$$

Básicamente existen dos familias de técnicas: las basadas en desarrollos en serie de $\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$, y los métodos de Runge-Kutta y sus derivados.

2. Métodos basados en desarrollos en serie

Considérese el desarrollo en serie

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \Theta(h^3). \quad (87)$$

Teniendo en cuenta el problema (85), se debe satisfacer

$$\begin{aligned} y'(x_i) &= \varphi(x_i, y(x_i)) \\ y''(x_i) &= \varphi'_x(x_i, y(x_i)) + \varphi'_y(x_i, y(x_i))\varphi(x_i, y(x_i)) \end{aligned} \quad (88)$$

En consecuencia, sustituyendo (88) en (87), se obtiene que

$$\frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h} = \varphi(x_i, y(x_i)) + \frac{h}{2} (\varphi'_x(x_i, y(x_i)) + \varphi'_y(x_i, y(x_i))\varphi(x_i, y(x_i))) + \Theta(h^2). \quad (89)$$

Por lo tanto, si se elige la función $\Phi(x, y)$ como

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) + \frac{h}{2} (\varphi'_x(x, y) + \varphi'_y(x, y)\varphi(x, y)), \quad (90)$$

el método que resulta es de **segundo orden** y $\tau_i = \tau_i(h^2)$.

Este método tiene la desventaja de que deben calcularse las derivadas parciales de $\varphi(x, y)$, y que las expresiones para órdenes mayores que 2 son muy farragosas, por lo que resultan ser métodos poco prácticos.

3. Métodos de Runge-Kutta

3.1. Definición general de los métodos de Runge-Kutta

En general los métodos de Runge-Kutta se basan en establecer que la función $\Phi(x, y)$ sea de la forma

$$\Phi(x, y) = \omega_0 k_0 + \omega_1 k_1 + \dots + \omega_n k_n \quad (91)$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned} k_0 &= \varphi(x, y) \\ k_1 &= \varphi(x + \theta_1 h, y + (\omega_{10} k_0) h) \\ k_2 &= \varphi(x + \theta_2 h, y + (\omega_{20} k_0 + \omega_{21} k_1) h) \\ &\dots \\ k_n &= \varphi(x + \theta_n h, y + (\omega_{n0} k_0 + \dots + \omega_{n, n-1} k_{n-1}) h) \end{aligned} \quad (92)$$

cumpléndose las condiciones siguientes

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} \omega_{kj} &= \theta_k, \quad k = 1, \dots, n; \\ \sum_{k=0}^n \omega_k (\theta_k)^m &= \frac{1}{m+1}, \quad m = 0, \dots, m_n. \end{aligned} \quad (93)$$

de modo que el error de truncamiento del algoritmo sea del mayor orden posible y/o generalmente elegido *a priori*.

La justificación de estos métodos se basa en que si se conoce el valor de la aproximación en un punto x_i ($y(x_i)$), puede obtenerse de un modo general el valor de la aproximación en un punto x_{i+1} ($y(x_{i+1})$), planteando la integración directa de la ecuación diferencial ordinaria dada en (85). Así,

$$y(x_{i+1}) \equiv y(x_i + h) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_i+h} \varphi(x, y(x)) dx \quad (94)$$

efectuando ahora el cambio de variable

$$x = x_i + \theta h, \quad dx = h d\theta \quad (95)$$

resulta

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + h \int_0^1 \varphi(x_i + \theta h, y(x_i + \theta h)) d\theta. \quad (96)$$

Comparando esta expresión con la forma general de los métodos de intervalo simple establecida en (84), obtenemos una posible función $\Phi(x, y)$

$$\Phi(x_i, y(x_i)) + \tau_i = \int_0^1 \varphi(x_i + \theta h, y(x_i + \theta h)) d\theta, \quad (97)$$

en la que la integral definida podemos evaluarla mediante una cuadratura numérica, esto es

$$\Phi(x_i, y(x_i)) + \tau_i = \int_0^1 \varphi(x_i + \theta h, y(x_i + \theta h)) d\theta \approx \sum_{j=0}^n \omega_j k_j \quad (98)$$

donde

$$k_j = \varphi(x_i + \theta_j h, y(x_i + \theta_j h)) \quad (99)$$

Usualmente se adopta $\theta_0 = 0$, por lo que los valores de k_0, k_1, \dots vendrían dados por

$$\begin{aligned} k_0 &= \varphi(x_i, y(x_i)) \\ k_1 &= \varphi(x_i + \theta_1 h, y(x_i + \theta_1 h)) \\ &\dots \end{aligned} \quad (100)$$

en los que a su vez el término $y(x_i + \theta_1 h)$ se aproximaría por

$$y(x_i + \theta_1 h) \approx y(x_i) + (\omega_{10} k_0) h \quad (101)$$

correspondiente a la integración mediante una cuadratura de 1 punto de

$$y(x_i + \theta_1 h) = y(x_i) + h \int_0^{\theta_1} \varphi(x_i + \theta h, y(x_i + \theta h)) d\theta. \quad (102)$$

Este mismo proceso operativo puede seguirse para obtener los valores de k_2, k_3 , etc.

3.2. Métodos de Runge-Kutta de segundo orden

Sea la función $\Phi(x, y)$ de la siguiente forma

$$\Phi(x, y) = \omega_0 k_0 + \omega_1 k_1 \quad (103)$$

donde los coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned} k_0 &= \varphi(x, y) \\ k_1 &= \varphi(x + \theta_1 h, y + (\omega_{10} k_0)h) \end{aligned} \quad (104)$$

El objetivo es obtener los valores de ω_0 , ω_1 , θ_1 y ω_{10} tales que el error de truncamiento τ_i sea al menos de orden 2. El punto de partida lo constituye por tanto la función

$$\tau = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y). \quad (105)$$

Desarrollemos en serie el primer sumando

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = y'(x) + \frac{h}{2!} y''(x) + \frac{h^2}{3!} y'''(x) + \Theta(h^3). \quad (106)$$

Si además tenemos en cuenta que por (85) se verifica:

$$\begin{aligned} y' &= \varphi \\ y'' &= \varphi'_x + \varphi'_y \varphi \\ y''' &= \varphi''_{xx} + 2\varphi''_{xy} + \varphi^2 \varphi''_{yy} + \varphi'_x \varphi'_y + \varphi(\varphi'_y)^2 \end{aligned} \quad (107)$$

y seguidamente desarrollamos en serie la función de dos variables $\Phi(x, y)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \omega_0 \varphi + \omega_1 \varphi(x + \theta_1 h, y + (\omega_{10} k_0)h) \\ &= \omega_0 \varphi + \omega_1 \left[\varphi + \theta_1 h \varphi'_x + \omega_{10} k_0 h \varphi'_y + \frac{(\theta_1 h)^2}{2!} \varphi''_{xx} + \frac{(\omega_{10} k_0 h)^2}{2!} \varphi''_{yy} + 2 \frac{\theta_1 \omega_{10} k_0 h^2}{2!} \varphi''_{xy} \right] + \Theta(h^3) \end{aligned} \quad (108)$$

[Cuando no se ha considerado relevante, en las funciones se ha omitido intencionadamente la dependencia de las variables para facilitar la notación y el seguimiento del desarrollo del método].

Si ahora se realiza la múltiple sustitución de (107) en (106), y el resultado de $\frac{y(x+h) - y(x)}{h}$ en la expresión (105), y en ésta a su vez se sustituye el desarrollo (108), y se agrupan términos se obtiene

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \Phi(x, y) \\ &= [1 - (\omega_0 + \omega_1)] \varphi \\ &\quad + h \left[\varphi'_x \left(\frac{1}{2} - \theta_1 \omega_1 \right) + \varphi \varphi'_y \left(\frac{1}{2} - \omega_1 \omega_{10} \right) \right] \\ &\quad + h^2 \left[\varphi''_{xx} \left(\frac{1}{6} - \frac{\omega_1 \theta_1^2}{2} \right) + 2\varphi''_{xy} \varphi \left(\frac{1}{6} - \frac{\omega_1 \theta_1 \omega_{10}}{2} \right) + \varphi^2 \varphi''_{yy} \left(\frac{1}{6} - \frac{\omega_1 \omega_{10}^2}{2} \right) + \frac{1}{6} \varphi'_x \varphi'_y + \frac{1}{6} \varphi (\varphi'_y)^2 \right] \\ &\quad + \Theta(h^3) \end{aligned} \quad (109)$$

A la vista de esta expresión, se puede conseguir que el esquema de Runge-Kutta sea al menos de **segundo orden**, sin más que imponer que

$$\begin{aligned} \omega_0 + \omega_1 &= 1 \\ \theta_1 \omega_1 &= \frac{1}{2} \\ \omega_1 \omega_{10} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (110)$$

Dado que se tienen tres ecuaciones y cuatro incógnitas, las distintas elecciones de los parámetros darán lugar a distintos métodos de Runge-Kutta de segundo orden.

En determinados casos especiales, y según la ecuación diferencial de que se trate (y por tanto de cuál sea la función $\varphi(x, y(x))$) puede ocurrir que, verificándose las condiciones dadas en (110), además el factor que multiplica a h^2 en (109) sea nulo con lo que el método de Runge-Kutta sería de **tercer orden**.

3.2.1. Método de Euler modificado

Es un método de Runge-Kutta de segundo orden con los coeficientes

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_1 = 1, \quad \theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \omega_{10} = \frac{1}{2} \quad (111)$$

que desarrollado es

$$\widehat{y}_{i+1} = \widehat{y}_i + h \varphi \left(x_i + \frac{h}{2}, \widehat{y}_i + \frac{h}{2} \varphi(x_i, \widehat{y}_i) \right) \quad (112)$$

y que puede interpretarse como aplicar dos veces el método de Euler, esto es,

$$\begin{cases} \widehat{y}_{i+1/2} = \widehat{y}_i + \frac{h}{2} \varphi(x_i, \widehat{y}_i) \\ \widehat{y}_{i+1} = \widehat{y}_i + h \varphi \left(x_i + \frac{h}{2}, \widehat{y}_{i+1/2} \right) \end{cases} \quad (113)$$

3.2.2. Método de Heun

Es un método de Runge-Kutta de segundo orden con los coeficientes

$$\omega_0 = \frac{1}{2}, \quad \omega_1 = \frac{1}{2}, \quad \theta_1 = 1, \quad \omega_{10} = 1 \quad (114)$$

que desarrollado es

$$\widehat{y}_{i+1} = \widehat{y}_i + \frac{h}{2} \left[\varphi(x_i, \widehat{y}_i) + \varphi(x_i + h, \widehat{y}_i + h \varphi(x_i, \widehat{y}_i)) \right]. \quad (115)$$

Este algoritmo, que puede aplicarse en dos pasos del siguiente modo

$$\begin{cases} \widetilde{y}_{i+1} = \widehat{y}_i + h \varphi(x_i, \widehat{y}_i) \\ \widehat{y}_{i+1} = \widehat{y}_i + \frac{h}{2} \left[\varphi(x_i, \widehat{y}_i) + \varphi(x_i + h, \widetilde{y}_{i+1}) \right] \end{cases} \quad (116)$$

suscita una idea interesante y es que se puede obtener una “predicción” del valor de la aproximación en el punto x_{i+1} con el cálculo de \widetilde{y}_{i+1} y seguidamente “corregir” el valor obtenido con la fórmula para \widehat{y}_{i+1} .

3.2.3. Método de Ralston

Es un método de Runge-Kutta de segundo orden con los coeficientes

$$\omega_0 = \frac{1}{3}, \quad \omega_1 = \frac{2}{3}, \quad \theta_1 = \frac{3}{4}, \quad \omega_{10} = \frac{3}{4} \quad (117)$$

que puede aplicarse en dos pasos del siguiente modo

$$\begin{cases} \widehat{y}_{i+3/4} = \widehat{y}_i + \frac{3h}{4} \varphi(x_i, \widehat{y}_i) \\ \widehat{y}_{i+1} = \widehat{y}_i + \frac{h}{3} \left[\varphi(x_i, \widehat{y}_i) + 2\varphi(x_i + \frac{3h}{4}, \widehat{y}_{i+3/4}) \right] \end{cases} \quad (118)$$

Es un método muy empleado que tiene la propiedad de minimizar la cota superior del error global de truncamiento.

3.3. Métodos de Runge-Kutta de orden superior

Los métodos de Runge-Kutta de orden superior a 2 se deducen de forma análoga a como se ha expuesto en el apartado anterior, y los principales métodos se exponen en el “formulario-resumen” de este tema.