DESIGUALDAD DE CAUCHY-SCHWARTZ

$$E^2[XY] \leq E[X^2]E[X^2]$$

Demostración

Considérese la función $Q(\lambda) = E[(X - \lambda Y)^2]$. Obviamente $Q(\lambda) \geq 0,\ \forall \lambda$.

Calculemos el mínimo de $Q(\lambda)$

$$\frac{dQ(\lambda)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}E[(X-\lambda Y)^2] = \frac{d}{d\lambda}E[X^2 - 2\lambda XY + \lambda^2 Y^2] = -2E[XY] + 2\lambda E[Y^2]$$

Igualando a 0,

$$\lambda_o = \frac{E[XY]}{E[Y^2]}, \quad \text{que obviamente es un mínimo}$$

El correspondiente valor de $Q(\lambda)$ para $\lambda = \lambda_o$ es

$$Q(\lambda_o) = E[X^2] - 2\frac{E[XY]}{E[Y^2]}E[XY] + \frac{E^2[XY]}{E^2[Y^2]}E[Y^2] = E[X^2] - 2\frac{E^2[XY]}{E[Y^2]} + \frac{E^2[XY]}{E[Y^2]} =$$

$$= E[X^2] - \frac{E^2[XY]}{E[Y^2]} \geq 0$$

Luego $E^2[XY] \leq E[X^2]E[X^2]$, c.q.d.

COROLARIO

Si $\rho_{xy} = 1$ o $\rho_{xy} = -1$, donde ρ_{xy} es el coeficiente de correlación entre las variables aleatorias X e Y, existen dos constantes a y b tales que $Y = a + bX$, es decir, las dos variables son linealmente dependientes.

Demostración

Como

$$\rho_{xy} = \frac{COV[XY]}{\sigma_x \sigma_y}, \quad \text{si} \ \ \rho_{xy}^2 = 1 \ \ \text{entonces} \ \ COV^2[XY] = \sigma_x^2 \sigma_y^2$$

Es decir, desarrollando la covarianza y las dos varianzas,

$$E^2[(X - m_x)(Y - m_y)] = E[(X - m_x)^2]E[(Y - m_y)^2]$$

Si hacemos ahora $(X - m_x) = T$ y $(Y - m_y) = S$ podemos escribir

$$E^2[TS] = E[T^2]E[S^2]. \tag{1}$$

Esto implica, utilizando la misma notación empleada en la demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwartz que

$$Q(\lambda) = E[(T - \lambda S)^2] = E[T^2] - 2\lambda E[TS] + \lambda^2 E[S^2] = 0 \tag{2}$$

Pero el discriminante de esta ecuación de segundo orden en λ es,

$$4E^2[TS] - 4E[T^2]E[S^2] = 0$$

que es cero debido a (1). Luego la ecuación (2) tiene una raíz real. Sea r esta raíz. Entonces podemos escribir

$$Q(r) = E[(T - rS)^2] = 0$$

Pero para que esta esperanza matemática sea nula, ha de ser nula la variable aleatoria sobre la que se aplica, ya que esta variable es siempre positiva. Es decir

$$(T - rS)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (T - rS) = 0 \quad \Rightarrow \quad (X - m_x) - r(Y - m_y) = 0 \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{X}{r} - \frac{m_x}{r} + m_y$$

con lo que queda demostrado que X e Y son linealmente dependientes.