

POLIEDROS REGULARES

CAPITULO I

1.— GENERALIDADES

1.1.— DEFINICION DE POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

- "POLIEDRO", en general, es un cuerpo geométrico, limitado por caras planas poligonales, tales que cada uno de sus lados pertenece a dos polígonos contiguos y dos polígonos cualesquiera con un lado común pertenecen a distintos planos.
- Si cada cara, que divide al espacio en dos semiespacios, deja al resto de las caras en un solo semiespacio el poliedro se dice que es "CONVEXO".
- Si las caras son "POLIGONOS REGULARES" y los ángulos poliedros que forman las aristas son "REGULARES E IGUALES" el poliedro se denomina "REGULAR".
- "POLIEDRO REGULAR CONVEXO" es aquél que cumple las condiciones especificadas señaladas.

1.2.— ELEMENTOS DE LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

- Los elementos geométricos fundamentales de este tipo de poliedros son:
 - CARAS — Son los polígonos planos que lo limitan.
 - ARISTAS — Son los lados de las caras.
 - VERTICES — Son los extremos de las aristas.
 - ANGULOS PLANOS — Son los ángulos de las caras.
 - ANGULOS DIEDROS — Son los ángulos formados por dos caras contiguas.
 - ANGULOS POLIEDROS — Son los ángulos formados por las aristas concurrentes, en cada uno de los vertices.

1.3.— PROPIEDADES DE LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

- Como en cada vértice concurren como mínimo tres caras y la suma de los ángulos de éstas tiene que ser menor de 360° se deduce que sólo pueden existir los siguientes casos:
 - 3 Triangulos equiláteros $= 3 \times 60^\circ = 180^\circ$
 - 4 Triangulos equiláteros $= 4 \times 60^\circ = 240^\circ$
 - 5 Triangulos equiláteros $= 5 \times 60^\circ = 300^\circ$
 - 3 cuadrados $= 3 \times 90^\circ = 270^\circ$
 - 3 Pentágonos regulares $= 3 \times 108^\circ = 324^\circ$
- Es decir, sólo existen CINCO poliedros regulares convexos.

- Llamando: C = Número de caras del poliedro.
 A = Número de aristas del poliedro.
 V = Número de vértices del poliedro.
 m = Número de lados de cada cara.
 n = Número de aristas de cada vértice.
- Como cada arista pertenece a dos caras contiguas y cada arista contiene dos vértices, se verifica:

$$m \cdot C = 2A$$

$$n \cdot V = 2A$$

- Todos los polígonos convexos (REGULARES o IRREGULARES) cumplen el conocido "TEOREMA DE EULER":

$$C + V = A + 2$$

- De las tres expresiones indicadas:

$$\left. \begin{array}{l} m \cdot C = 2A \\ n \cdot V = 2A \\ C + V = A + 2 \end{array} \right\} \text{ Se obtienen los valores de C-A-V en función de m y n.}$$

$$A = \frac{2m \cdot n}{2(m+n) - mn}$$

$$C = \frac{4n}{2(m+n) - mn}$$

$$V = \frac{4m}{2(m+n) - mn}$$

- Como se tienen que cumplir las condiciones:

$$m \geq 3 \qquad " \qquad 3 \leq n < 6$$

Resulta el siguiente cuadro correspondiente a los únicos cinco poliedros regulares convexos existentes:

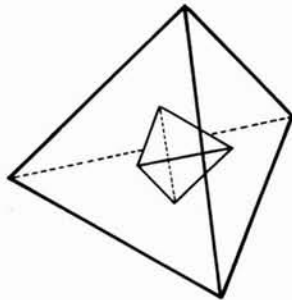
NOMBRE	m	n	C	V	A	NATURALEZA	
						CARAS	ANGULOS
TETRAEDRO	3	3	4	4	6	Triangulos	Triedros
OCTAEDRO	3	4	8	6	12	Triangulos	Tetraedros
ICOSAEDRO	3	5	20	12	30	Triangulos	Pentaedro
HEXAEDRO O CUBO	4	3	6	8	12	Cuadrados	Triedros
DODECAEDRO	5	3	12	20	30	Pentagonos	Triedros

1.4.— POLIEDROS CONJUGADOS

- Se entiende por “POLIEDRO CONJUGADO” de uno dado al que resulta de tomar como vértices los centros de las caras de este último.

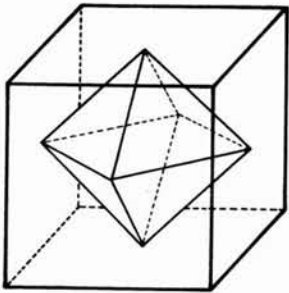
TETRAEDRO

(Tetraedro)



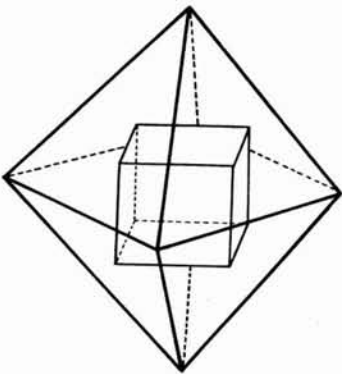
HEXAEDRO O CUBO

(Octaedro)



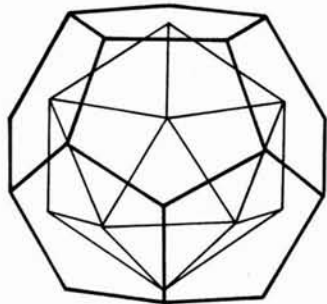
OCTAEDRO

(Cubo)



DODECAEDRO

(Icosaedro)



ICOSAEDRO

(Dodecaedro)



1.5.— SECCIONES PRINCIPALES

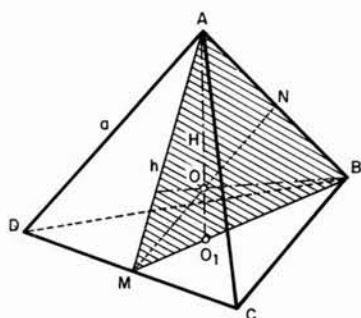
- Se llama "SECCION PRINCIPAL" de un poliedro regular convexo a toda sección plana de simetría en la cual quedan definidas las siguientes magnitudes fundamentales del poliedro:
 - Arista.
 - Radio de la esfera circunscrita.
 - Radio de la esfera inscrita (tangente a las caras).
 - Radio de la esfera tangente a las aristas.
- El conocimiento y construcción de la SECCION PRINCIPAL de un poliedro regular convexo es fundamental para la representación en perspectiva del mismo, en las distintas posiciones características en que se suelen representar:
 - Cara apoyada en plano horizontal de proyección.
 - Vértice apoyado y diagonal de dicho vértice vertical.
 - Arista apoyada y sección principal pasando por dicha arista vertical.

1.6.— TETRAEDRO

1.6.1.— Descripción

C	4
V	4
A	6

- Formado por cuatro caras TRIANGULOS EQUILATEROS iguales, cuatro vértices y seis aristas.
- Las aristas opuestas son ortogonales.
- Las rectas que unen los puntos medios de las aristas opuestas se cortan en un punto O (CENTRO DEL TETRAEDRO) y forman un triedro trirectángulo



a = arista

$$h = \text{altura cara} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

H = altura tetraedro

o = centro tetraedro

R = radio esfera circunscrita = $OA = OB = OC = OD$

r = radio esfera inscrita = OO_1

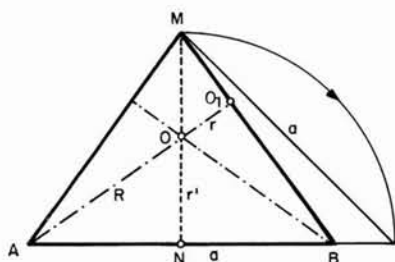
r' = radio esfera tangente a las aristas

$\triangle AOB = \triangle COD$ luego $\overline{OM} = \overline{ON} = r'$

$$MN^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad MN = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$H^2 = h^2 - \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}h^2 = \frac{8}{9} \cdot \frac{3a^2}{4} = \frac{4a^2}{3} \quad \therefore H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

1.6.2.— Sección principal



- La sección principal pasa por una arista y el punto medio de la arista opuesta.

- Existen seis secciones principales tales como $\triangle AMB$ que son TRIANGULOS ISOSCELES.

— $OM = ON = r'$

— $OO_1 = r$

— $OA = R$

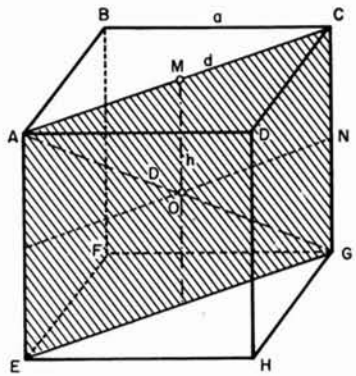
— Como $MN = \frac{a}{\sqrt{2}}$ conocido MN, graficamente se obtiene a.

1.7.— HEXAEDRO O CUBO

C	6
V	8
A	12

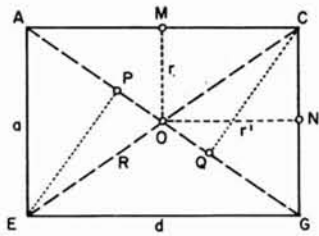
1.7.1.— Descripción

— Formado por seis caras que son CUADRADOS iguales, ocho vértices y doce aristas.



- a = Arista
- d = Diagonal de una cara = $a\sqrt{2}$
- D = Diagonal del cubo = $a\sqrt{3}$
- O = Centro del cubo = centro de simetría
- R = Radio esfera circunscrita = OA
- r = Radio esfera inscrita = OM
- r' = Radio esfera tangente a las aristas = ON
- h = a = r = altura del cubo

1.7.2.— Sección principal



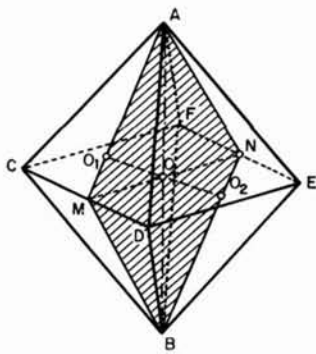
- La sección principal pasa por dos aristas opuestas.
- Existen SEIS secciones principales tales como ACGB RECTANGULO de lados a (arista) y d (diagonal cara).
- $OM = r$ " $ON = r'$ " $OA = OC = OE = OG = R$
- Conviene destacar la propiedad:
 $AP' = PQ = QG = \frac{D}{3}$ " AG = Diagonal del cubo.

C	8
V	6
A	12

1.8.— OCTAEDRO

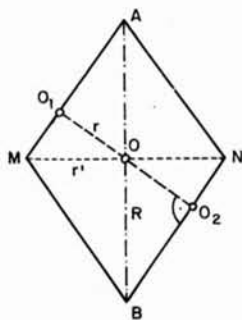
1.8.1.— Descripción

— Formado por ocho caras TRIANGULOS EQUILATEROS iguales, seis vértices y doce aristas.



- a = Arista
- h = Altura cara lateral = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
- D = AB = Diagonal octaedro
- O = Centro octaedro = centro de simetría
- R = Radio esfera circunscrita = OA
- r = Radio esfera inscrita = $OO_1 = OO_2$
- r' = Radio esfera tangente a las aristas = OM = ON
- O₁ = Ortocentro triangulo ACD
- O₂ = Ortocentro triangulo BEF

1.8.2.— Sección principal



- La sección principal pasa por una diagonal y es perpendicular a dos aristas opuestas.
- Hay SEIS secciones principales, ROMBOS, tales como la AMBN en la que AB = diagonal.
- R = OA = OB
- r = $OO_1 = OO_2$
- r' = OM = ON

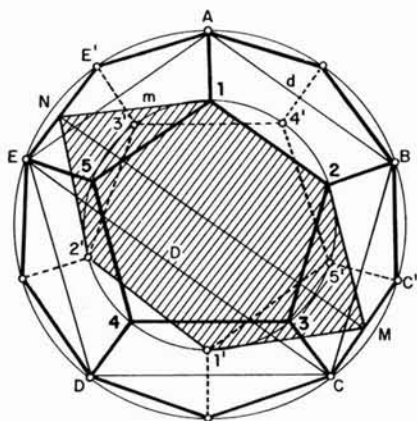
1.9.— DODECAEDRO

1.9.1.— Descripción

— Formado por doce caras PENTAGONOS regulares iguales, veinte vértices y treinta aristas.

— En el dodecaedro conviene destacar las siguientes magnitudes:

- a = Arista = Lado de cada cara pentagonal.
- m = Mediana = Distancia de un vértice al lado opuesto de la misma cara.
- d = Diagonal de la cara pentagonal.
- D = Diagonal del pentagono cuyo lado es la diagonal de una cara = d .



1) — Supuesto el poliedro apoyado sobre una de sus caras, en la vista en planta se ven en su verdadera magnitud los pentágonos:

1 - 2 - 3 - 4 - 5 = Base superior = Lado = a

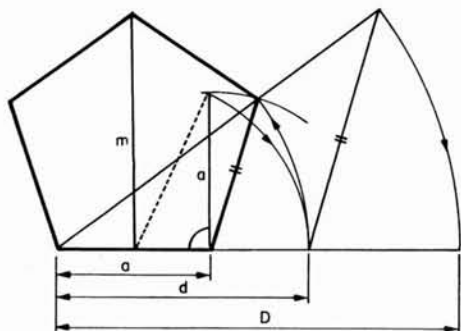
1' - 2' - 3' - 4' - 5' = Base inferior = Lado = a

A - B - C - D - E = Pentágono de lado = d

2) — M punto medio de $\overline{CC'}$ - N punto medio de $\overline{EE'}$.

3) — La sección principal 1-2-M-1'-2'-N tiene la dimensión $\overline{MN} = \overline{EC} = D$.

1.9.2.— Sección principal

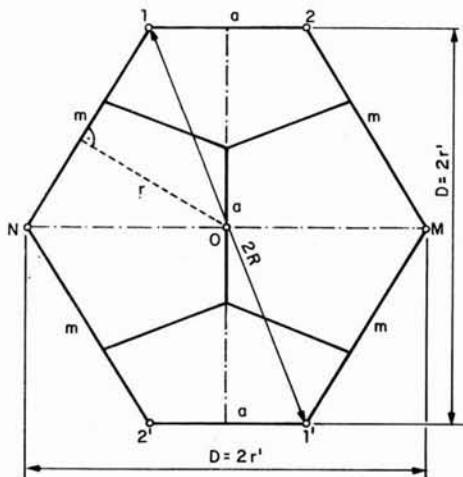


— La sección principal pasa por dos aristas opuestas y es un HEXAGONO IRREGULAR que tiene dos lados opuestos a la arista a y los otros cuatro son iguales a la mediana de una de las caras.

— Conocida la arista se calculan gráficamente $d - m - D$.

— Existen QUINCE secciones principales tales como la 1-2-M-1'-2'-N.

— La sección principal, HEXAGONO IRREGULAR como ya hemos indicado tiene la misma altura y anchura ($\overline{MN}$) puesto que ambas magnitudes son la distancia entre dos aristas opuestas.

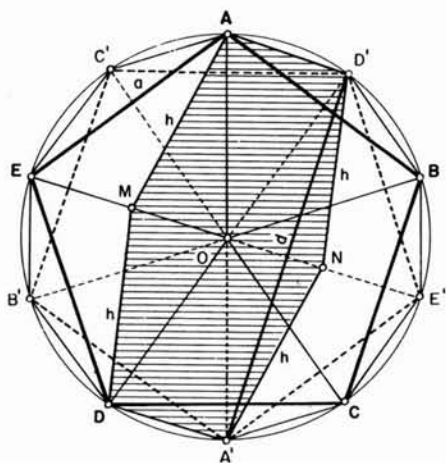


1.10.— ICOSAEDRO

C	20
V	12
A	30

1.10.1.— Descripción

- Formado por veinte caras TRIANGULOS EQUILATEROS iguales, doce vértices y treinta aristas.
- En el icosaedro conviene destacar las siguientes magnitudes:
 - a = arista = lado de la cara triangular.
 - h = altura de una cualquiera de las caras.
 - d = diagonal del pentágono de lado igual a la arista = a .



- 1) — Supuesto el poliedro con una de las diagonales verticales, en la vista en planta veremos dos pirámides pentagonales, una vista y otra oculta.

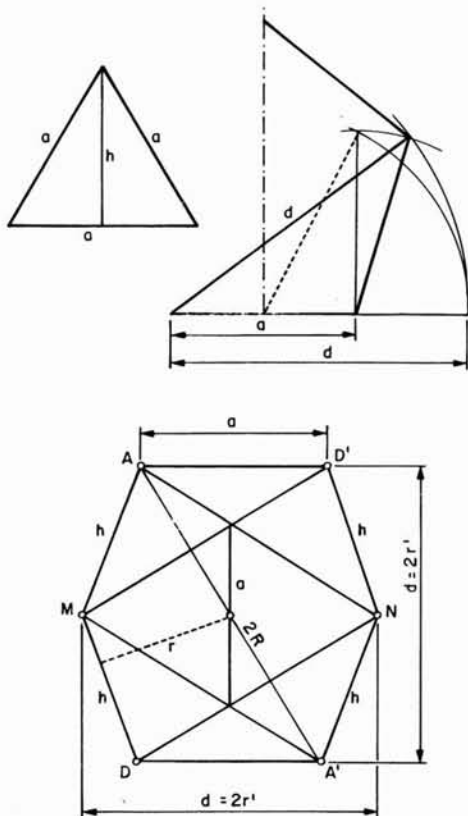
Las bases pentagonales se ven en verdadera magnitud siendo su lado la arista = a .

- Base pentagonal superior = ABCDE.
- Base pentagonal inferior = A'B'C'D'E'.

- 2) — M punto medio de $\overline{OE}$.
N punto medio de $\overline{OE'}$.

- 3) — La sección principal AD'NA'DM tiene la dimensión $AD = A'D' = d$ = diagonal pentágono de lado = a .

1.10.2.— Sección principal



- La sección principal pasa por dos aristas opuestas y es un HEXAGONO IRREGULAR que tiene dos lados opuestos iguales a la arista a y los otros cuatro son iguales a la altura h de cada cara.

- Conocida la arista = a se calculan gráficamente los valores de la altura = h de una cara y el valor de la diagonal = d del pentágono de lado = a arista del poliedro.

- Existen QUINCE secciones principales tales como la A-D'-N-A'-D-M.

- La sección principal tiene la misma altura y anchura igual a $d = 2r'$ distancia entre dos aristas opuestas.

$C+V=A+2$	Caras	α°	Denominación	A = aristas	C = caras	V = vértices
	$\triangle$	60	TETRAEDRO	6	4	4
	$\triangle$	60	OCTAEDRO	12	8	6
	$\triangle$	60	ICOSAEDRO	30	20	12
	$\square$	90	HEXAEDRO	12	6	8
	pentágono	108	DODECAEDRO	30	12	20

TETRAEDRO

C	4
V	4
A	6

SECCION PRINCIPAL

Pasa por arista y punto medio arista opuesta

1) O centro " $OA=OB=OC=OD=R$ = Radio esfera circunscrita

2) $\triangle ADB=\triangle COD$ " luego $OM=ON=r'$ = Radio esfera tangente a las aristas

3) $OO_1=r$ = Radio esfera tangente a las caras

4) $h=a\sqrt{3}/2$ " $MN^2=h^2-(a/2)^2$ " $MN=a/\sqrt{2}$ Conocido MN gráficamente se obtiene a.

$H=AO_1$ = altura tetraedro

$H^2=h^2-(\frac{h}{3})^2=\frac{8}{9}h^2=\frac{8}{9}\frac{3a^2}{4}=\frac{4a^2}{3}$ " $H=\frac{a\sqrt{6}}{3}$

HEXAEDRO

C	6
V	8
A	12

SECCION PRINCIPAL

Pasa por dos aristas opuestas

Nota: $AM=MN=MC$

OCTAEDRO

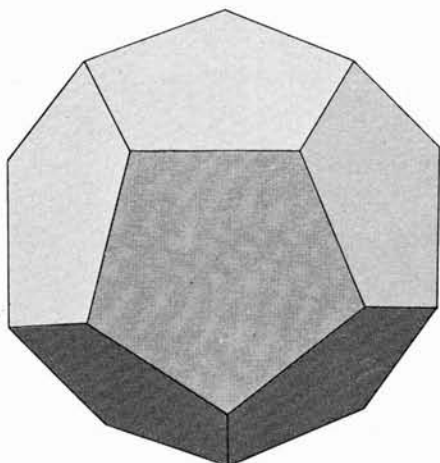
C	8
V	6
A	12

SECCION PRINCIPAL

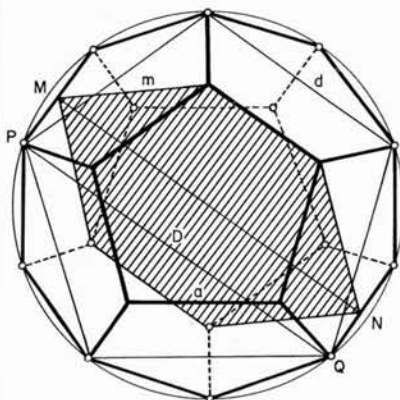
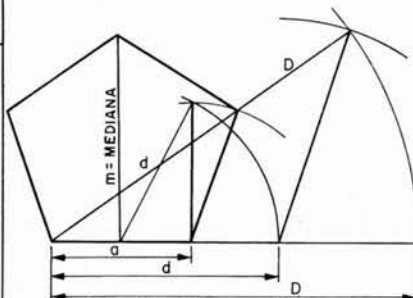
Pasa por diagonal y es perpendicular a dos aristas opuestas

$MN=a$

DODECAEDRO



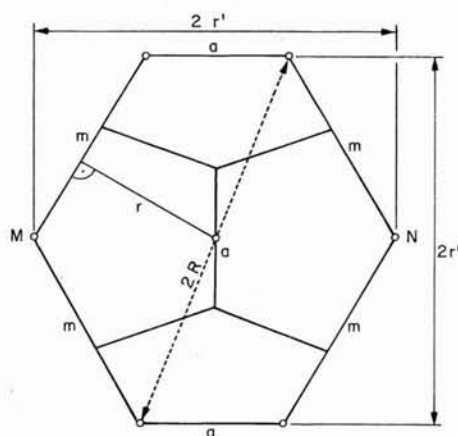
C	12
V	20
A	30



$MN = 2r'$
 $MN = PQ = \text{diagonal pentágono lado } d$
 Los pentágonos de las bases se ven en verdadera magnitud

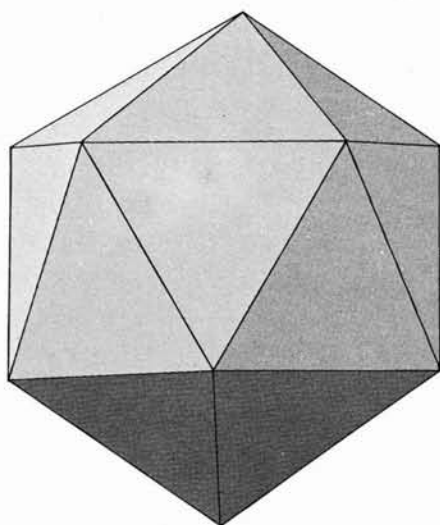
SECCION PRINCIPAL

Pasa por dos aristas opuestas



$R = \text{radio esfera circumsrita.}$
 $r = \text{radio esfera tangente a las caras}$
 $r' = \text{radio esfera tangente a las aristas}$
 $2r'$ es la diagonal de un pentágono de lado la diagonal pentágono lado a

ICOSAEDRO

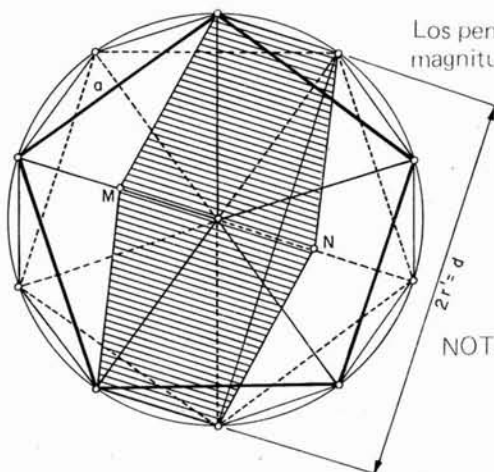
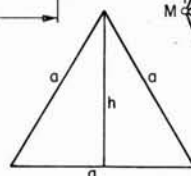
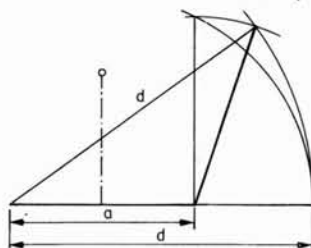


C	20
V	12
A	30

NOTA: Se obtiene uniendo los centros caras dodecaedro

SECCION PRINCIPAL

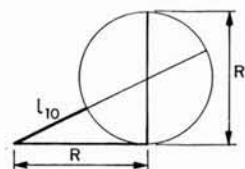
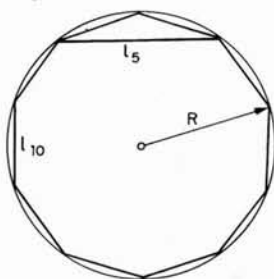
Pasa por dos aristas opuestas



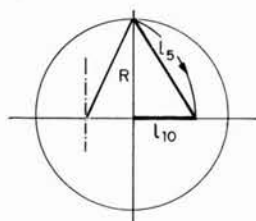
Los pentágonos se ven en verdadera magnitud

NOTA: He tomado a mayor para que se vea mejor

Decágono

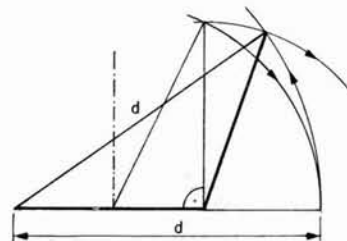


l_{10} sección aurea de R



Dado R hallar l_5 y l_{10}

Dado l_5 dibujar pentágono



CAPITULO II

2.0.— REPRESENTACION EN PERSPECTIVA DE LOS POLIEDROS REGULARES CONVEXOS

— A continuación, y con objeto de familiarizarse con este tipo de figuras se han dibujado los distintos poliedros regulares convexos en todos los sistemas de representación:

- Proyección DIEDRICA
- Perspectiva ISOMETRICA
- Perspectiva CABALLERA
- Perspectiva CONICA

— Cada poliedro se ha considerado situado con relación al plano horizontal en las posiciones más usuales:

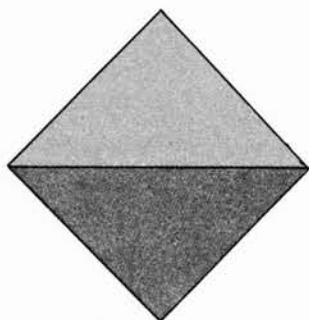
- TETRAEDRO..... $\left\{ \begin{array}{l} \text{Arista vertical} \\ \text{Dos aristas horizontales} \\ \text{Cara apoyada} \end{array} \right.$
- CUBO $\left\{ \begin{array}{l} \text{Diagonal vertical} \\ \text{Arista apoyada y sección principal vertical} \\ \text{Cara apoyada} \end{array} \right.$
- OCTAEDRO..... $\left\{ \begin{array}{l} \text{Diagonal vertical} \\ \text{Arista apoyada y plano por aristas opuestas vertical} \\ \text{Cara apoyada} \end{array} \right.$
- DODECAEDRO $\left\{ \begin{array}{l} \text{Diagonal vertical} \\ \text{Arista apoyada y sección principal vertical} \\ \text{Cara apoyada} \end{array} \right.$
- ICOSAEDRO $\left\{ \begin{array}{l} \text{Diagonal vertical} \\ \text{Arista apoyada y sección principal vertical} \\ \text{Cara apoyada} \end{array} \right.$

2.1.

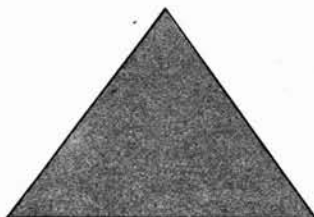
TETRAEDRO

C	4
V	4
A	6

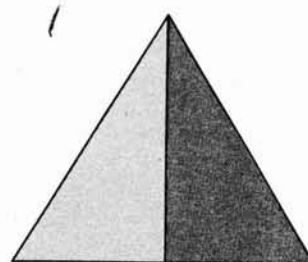
ARISTA VERTICAL



DOS ARISTAS HORIZONTALES



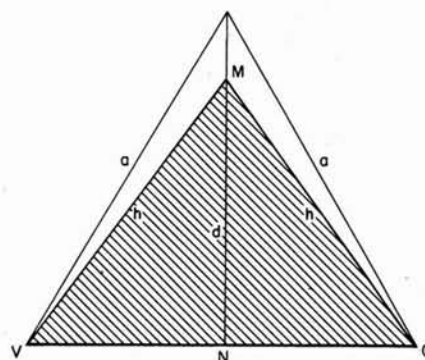
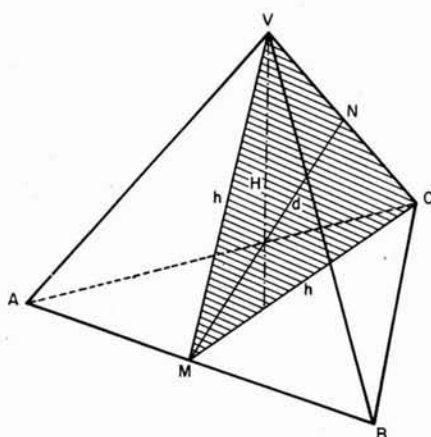
CARA APOYADA



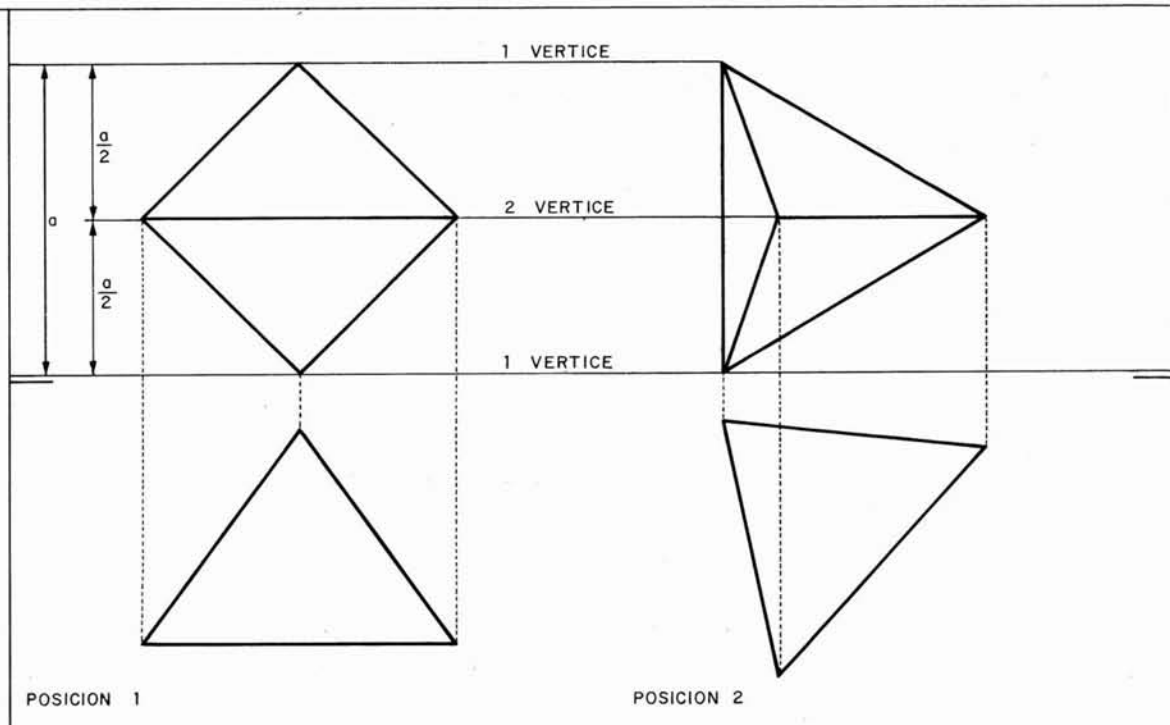
SECCION PRINCIPAL:

- 1) — Triángulo isósceles de lado = a y lados iguales = h .
- 2) — Pasa por una arista y el punto medio arista opuesta.
- 3) — Contiene los valores

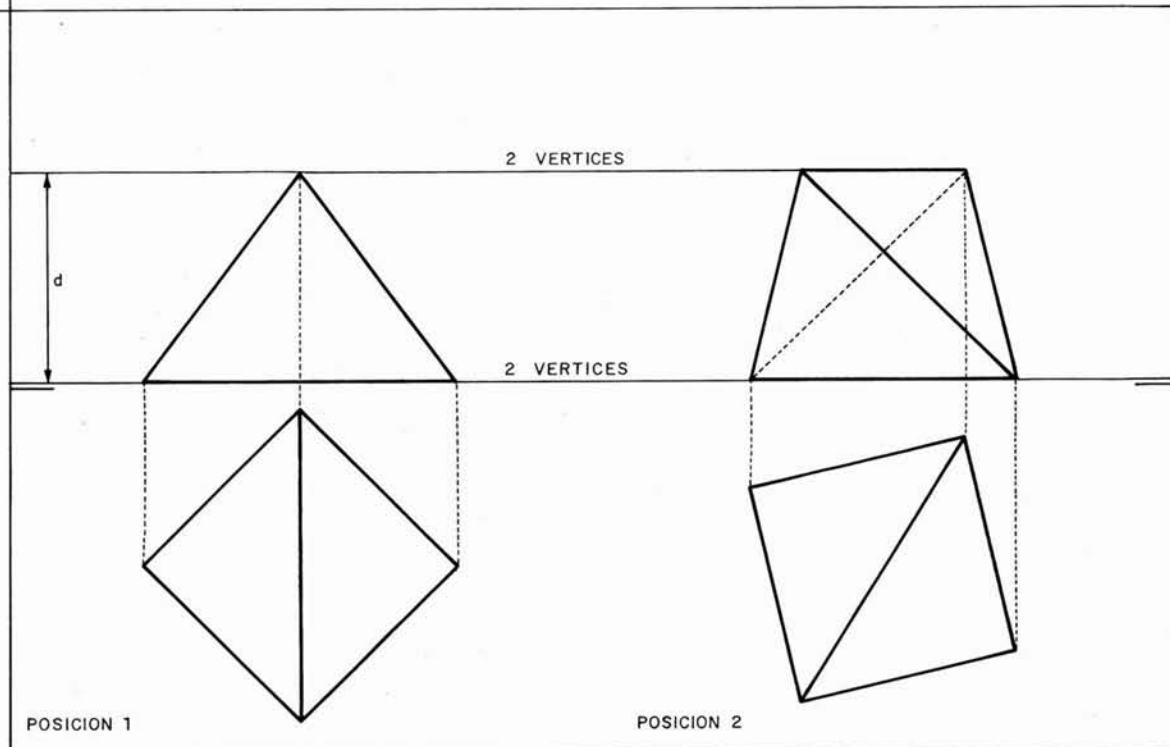
$$\left\{ \begin{array}{l} R = \text{Radio esfera circunscrita.} \\ r = \text{Radio esfera tangente a las caras.} \\ r' = \text{Radio esfera tangente a las aristas.} \end{array} \right.$$



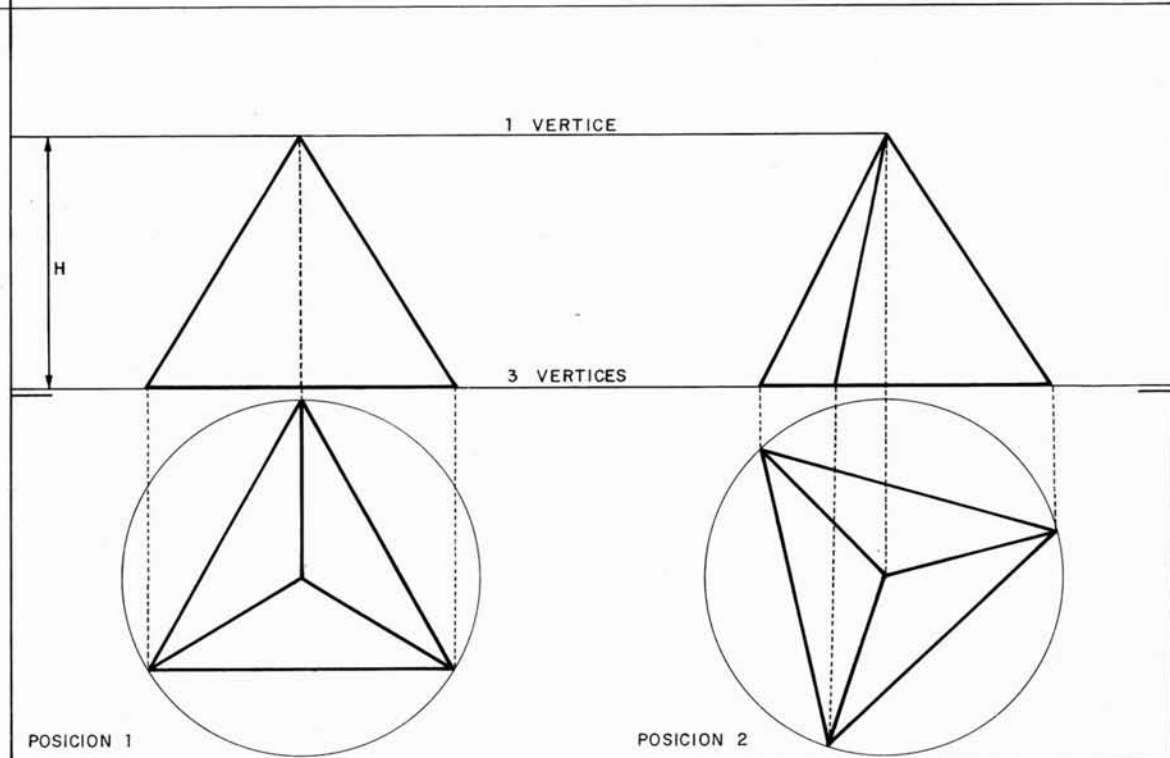
ARISTA VERTICAL



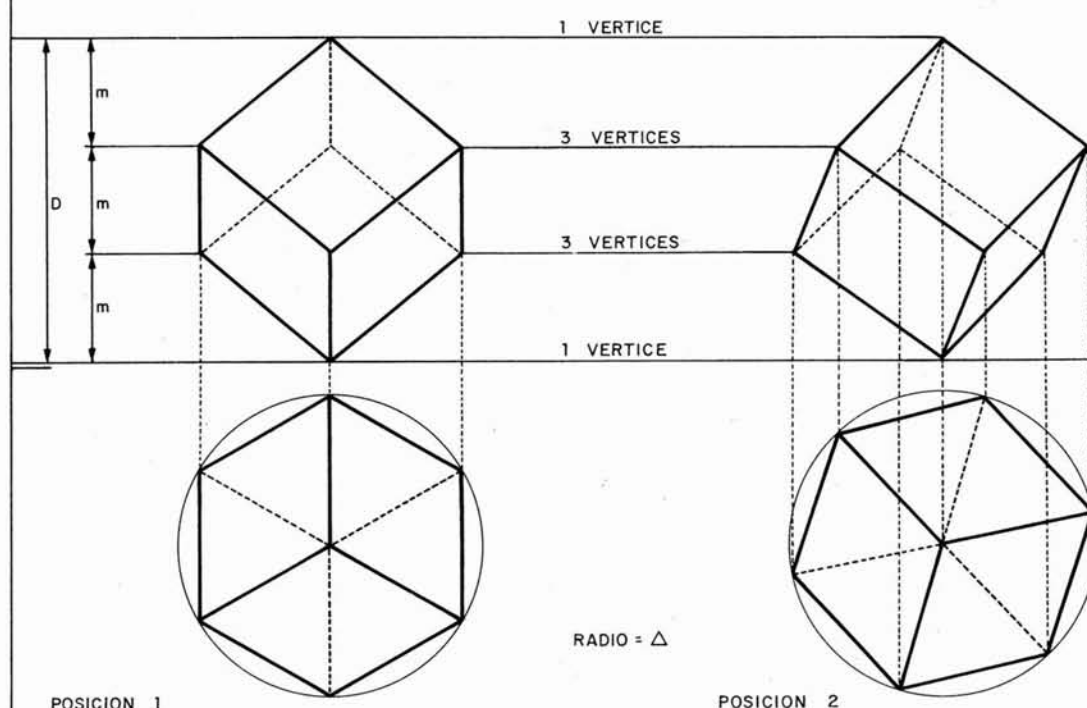
DOS ARISTAS HORIZONTALES



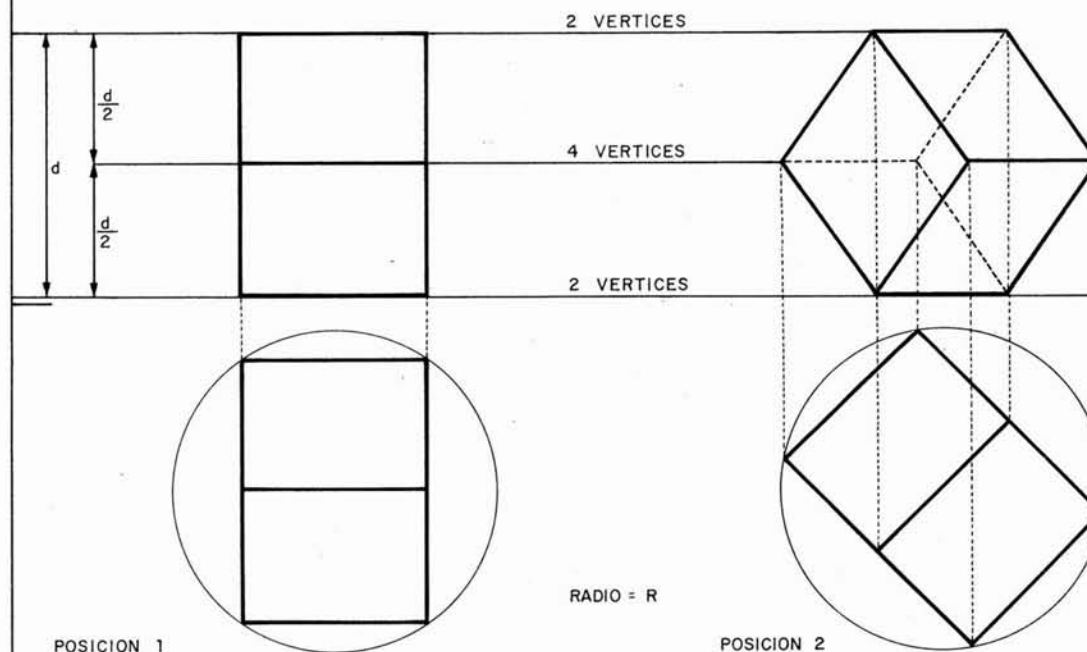
CARA APOYADA



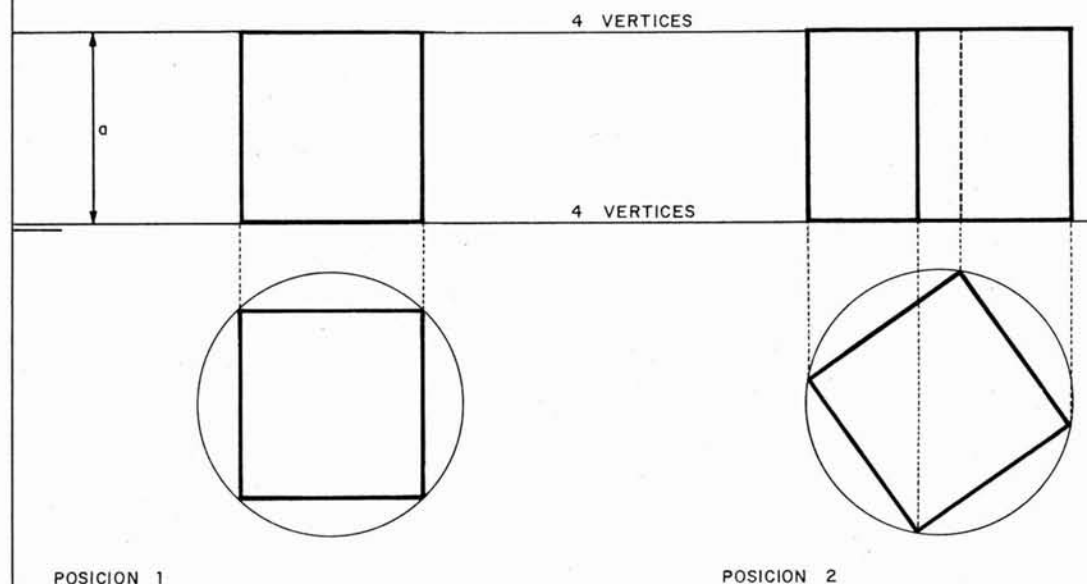
DIAGONAL VERTICAL



ARISTA APOYADA Y SECCION PRINCIPAL VERTICAL



CARA APOYADA

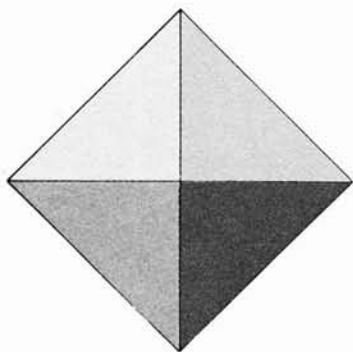


2.3.

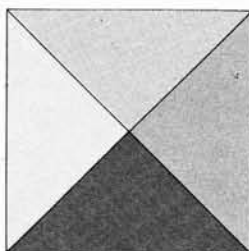
OCTAEDRO

C	8
V	6
A	12

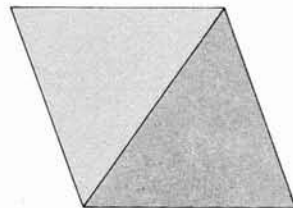
DIAGONAL VERTICAL



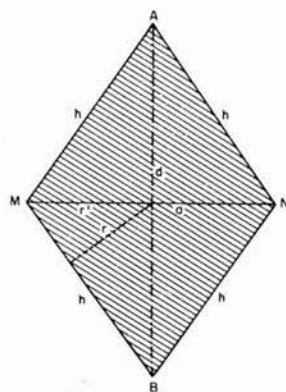
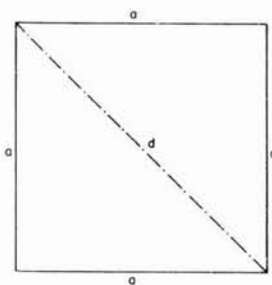
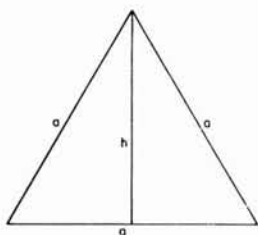
ARISTA APOYADA
PLANO POR ARISTAS
OPUESTAS VERTICAL



CARA APOYADA



Arista = 40 mm

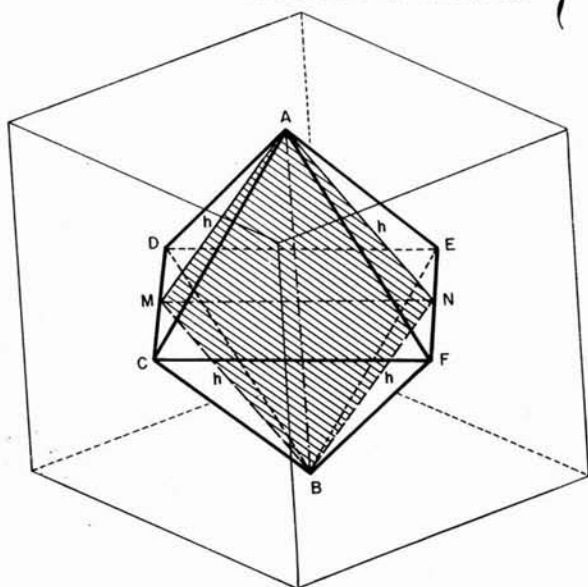


SECCION PRINCIPAL

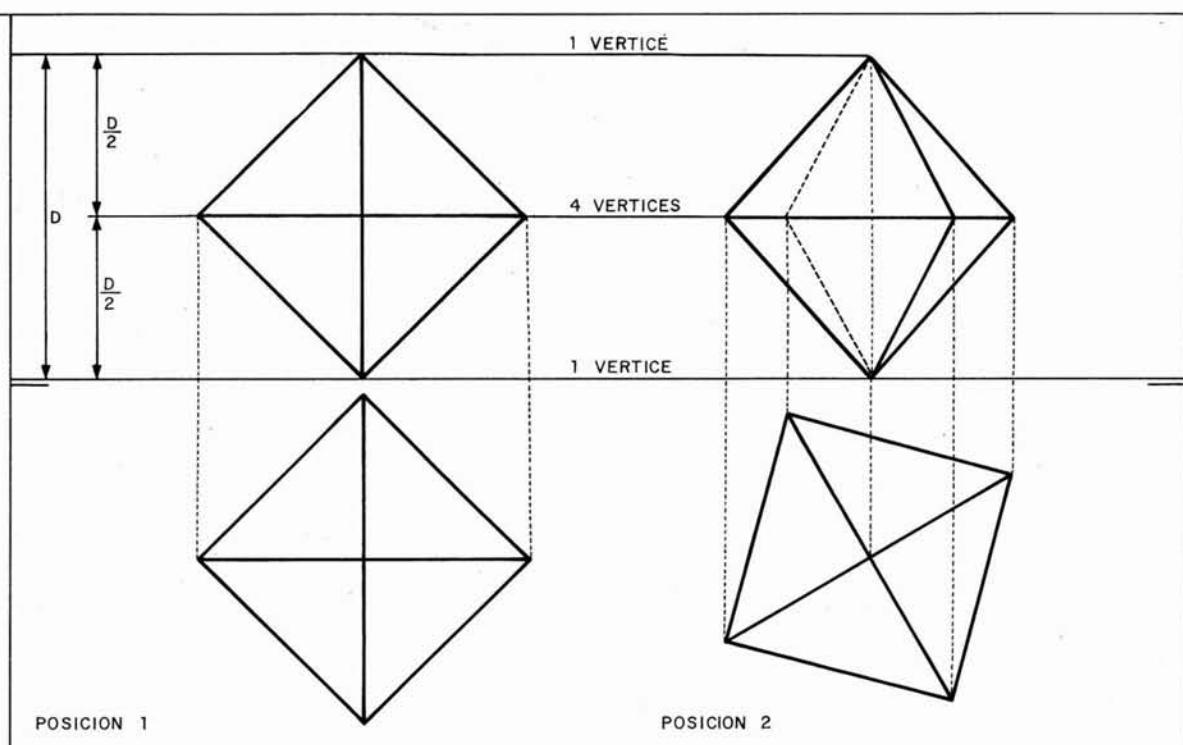
- 1) Rombo de lado h = altura triángulo equilátero de lado la arista y diagonales a (arista) y d (diagonal cuadrado lado igual arista).
- 2) Pasa por una diagonal y es perpendicular a dos aristas opuestas.

- 3) Contiene los valores de

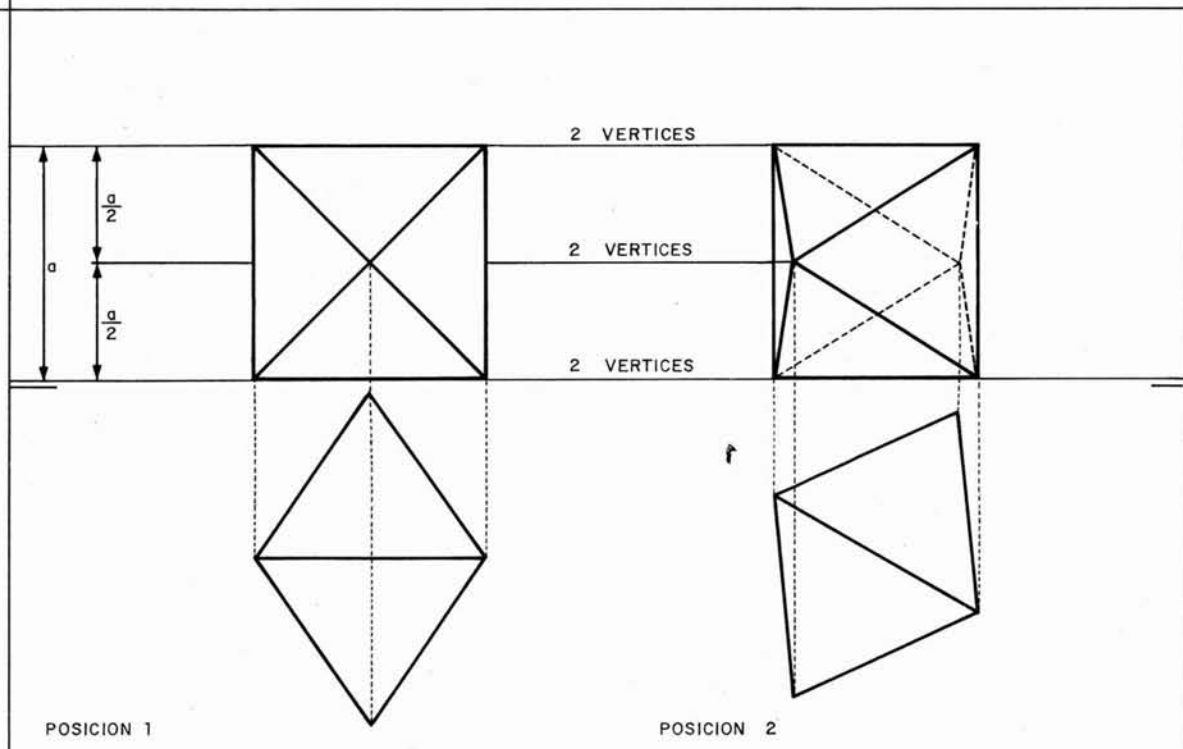
}	R = Radio esfera circunscrita.
	r = Radio esfera tangente a las caras.
	r' = Radio esfera tangente a las aristas.



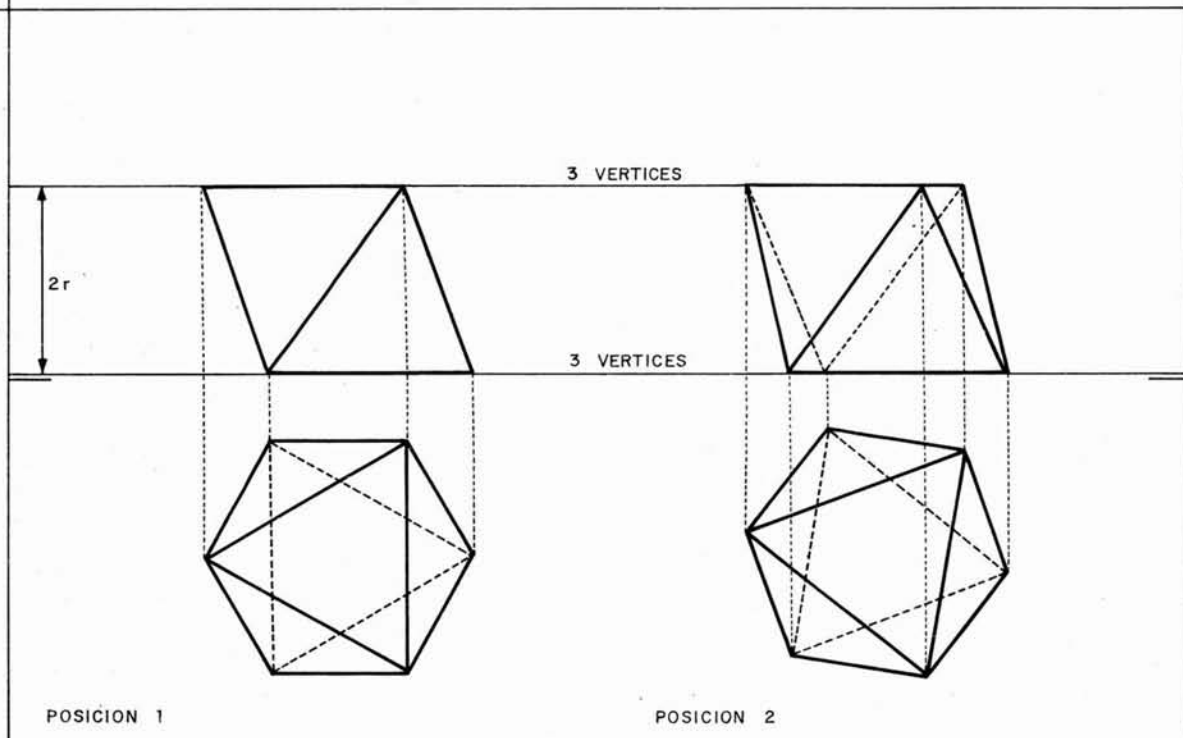
DIAGONAL VERTICAL



ARISTA APOYADA
PLANO POR ARISTAS OPUESTAS VERTICAL

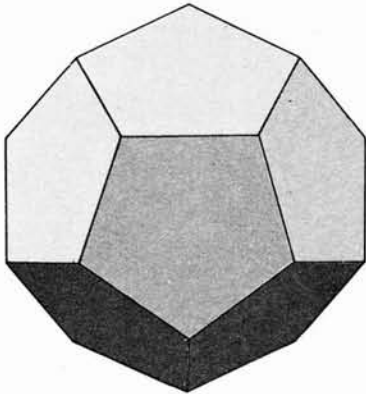


CARA APOYADA

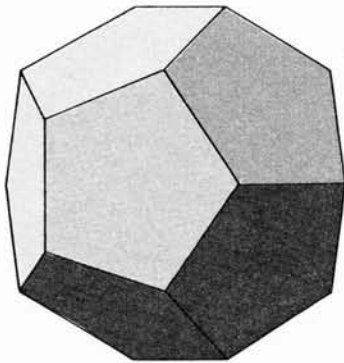


C	12
V	20
A	30

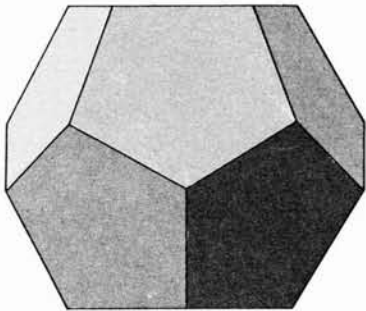
DIAGONAL VERTICAL



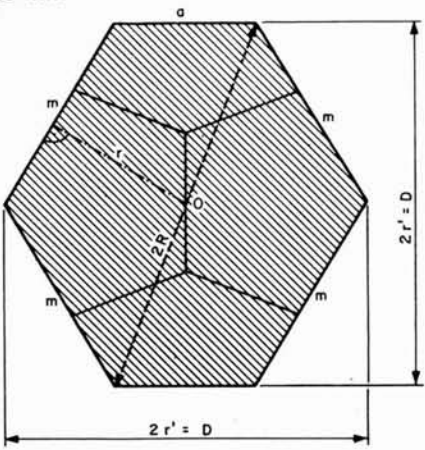
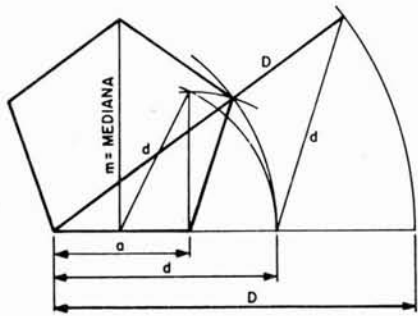
ARISTA APOYADA
Y SECCION PRINCIPAL VERTICAL



CARA APOYADA



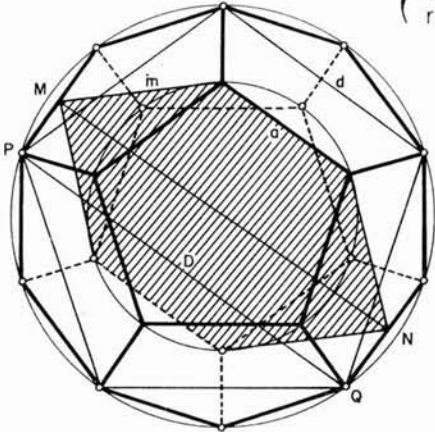
Arista = $a = 20\text{ mm}$



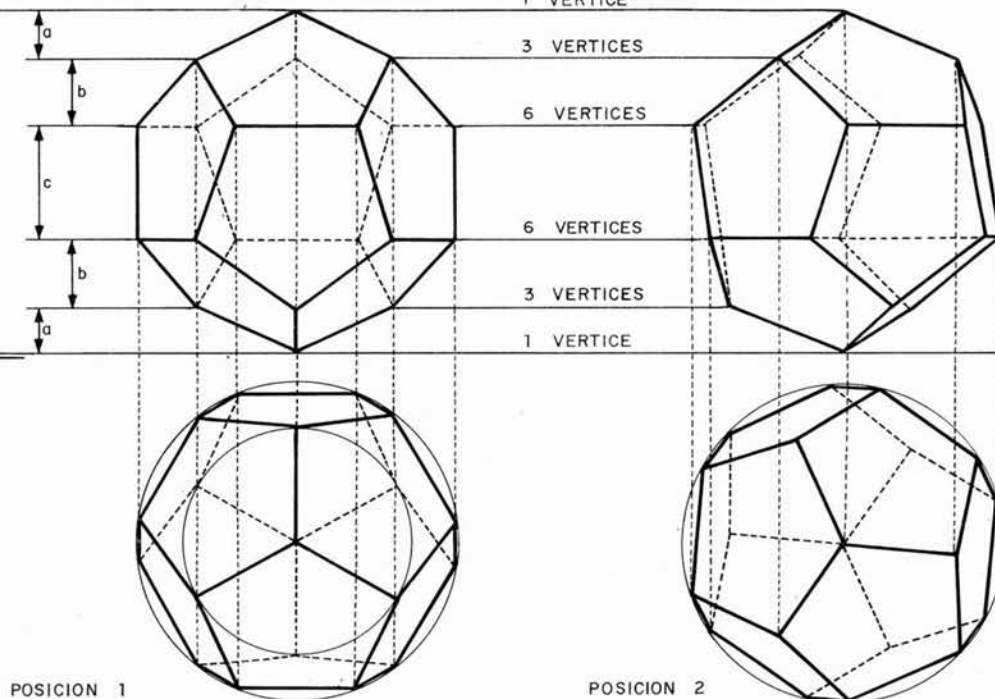
SECCION PRINCIPAL

- 1) Exagono de lados a y m y altura = anchura = D siendo D la diagonal de un pentagono de lado a .
- 2) Pasa por 2 aristas opuestas.

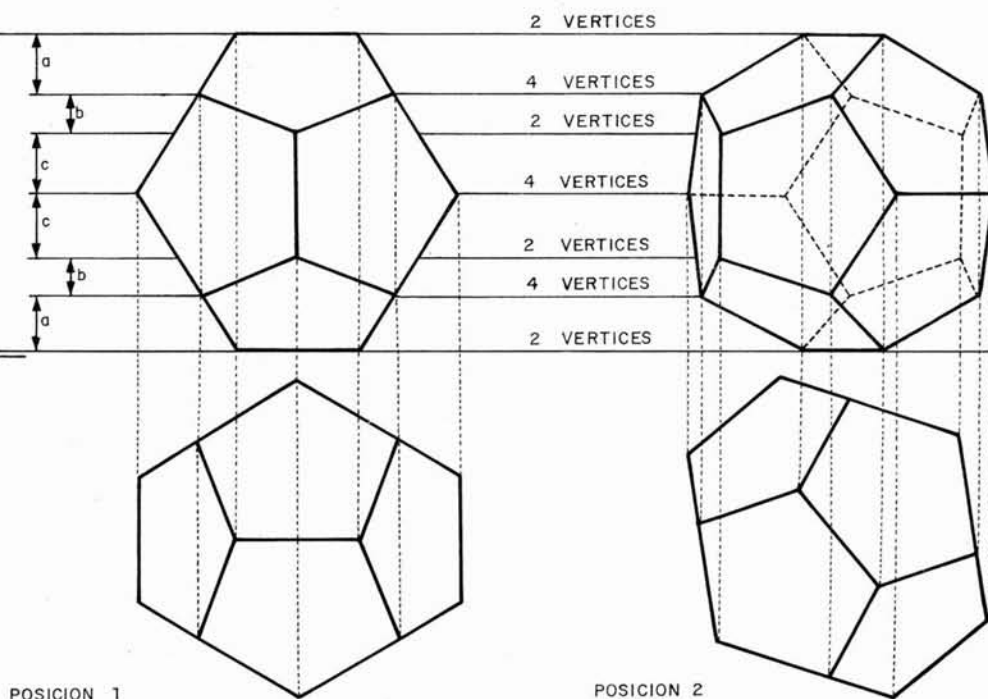
- 3) Contiene los valores de $\left\{ \begin{array}{l} R = \text{Radio esfera circunscrita.} \\ r = \text{Radio esfera tangente a las caras.} \\ r' = \text{Radio esfera tangente a las aristas.} \end{array} \right.$



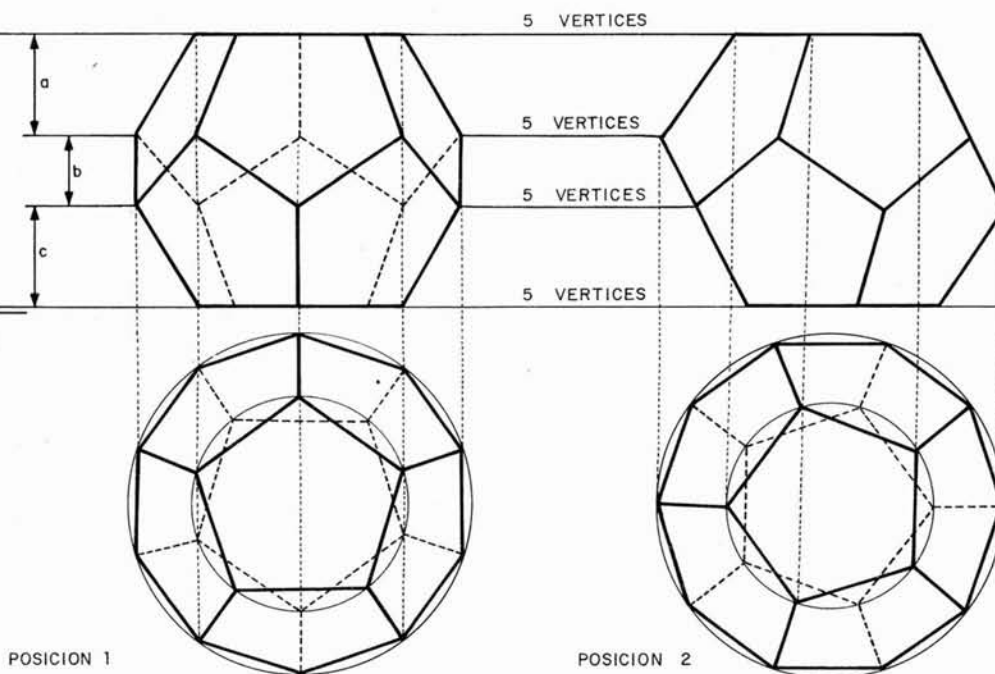
DIAGONAL VERTICAL



ARISTA APOYADA Y SECCION PRINCIPAL VERTICAL



CARA APOYADA

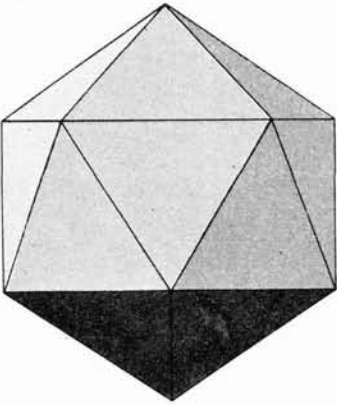


2.5.

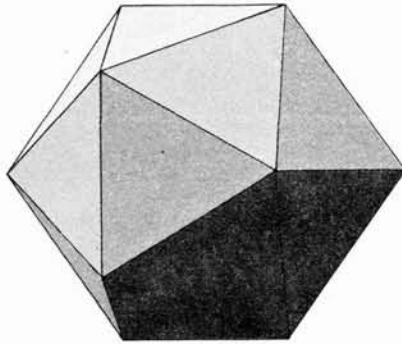
ICOSAEDRO

C	20
V	12
A	30

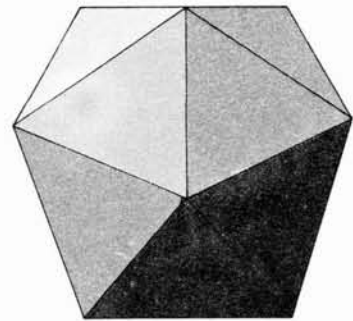
DIAGONAL VERTICAL



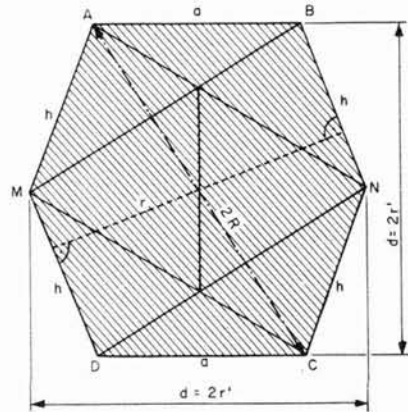
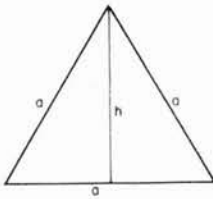
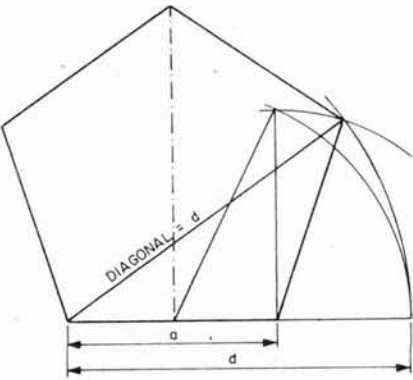
ARISTA APOYADA
Y SECCION PRINCIPAL VERTICAL



CARA APOYADA

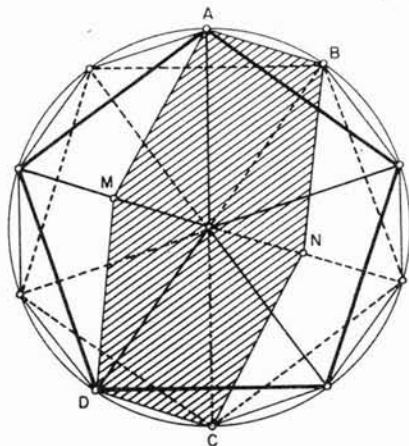


Aristas = $a = 30$ mm.

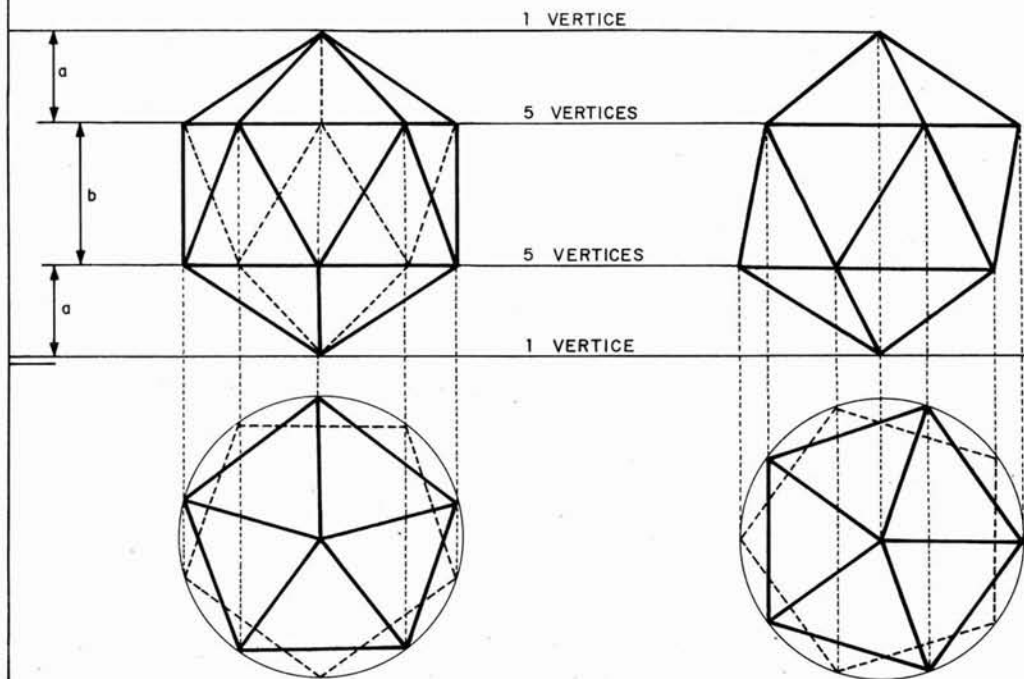


- SECCION PRINCIPAL:**
- 1) Exágono de lados a y h y de altura = anchura = d siendo d la diagonal de un pentágono de lado a = arista.
 - 2) Pasa por dos aristas opuestas.
 - 3) Contiene los valores de

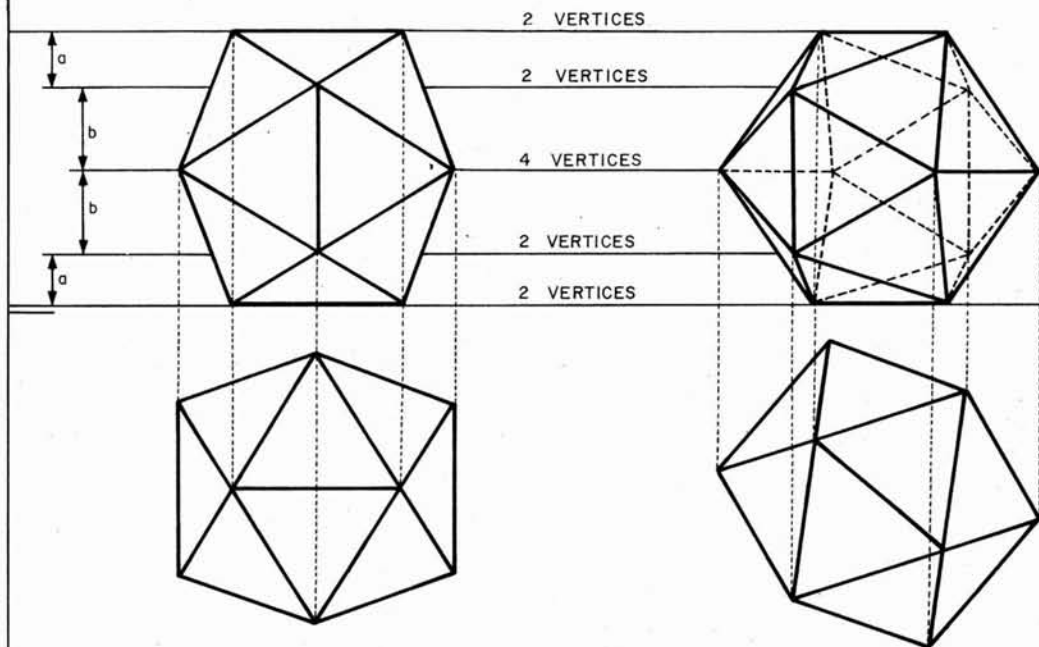
- $\left\{ \begin{array}{l} R = \text{Radio esfera circunscrita.} \\ r = \text{Radio esfera tangente a las caras.} \\ r' = \text{Radio esfera tangente a las aristas.} \end{array} \right.$



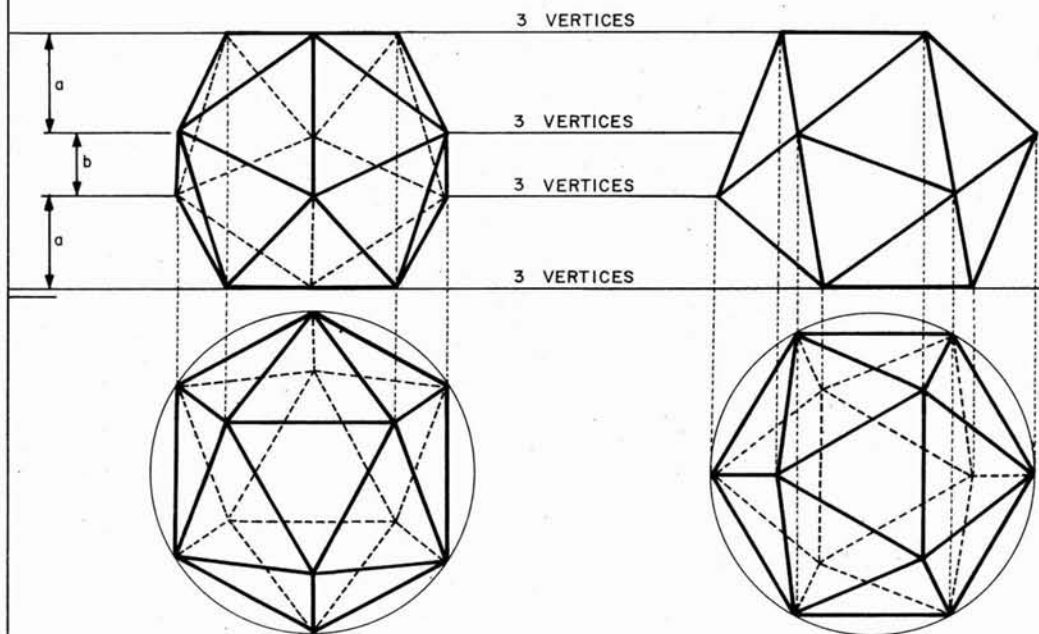
DIAGONAL VERTICAL



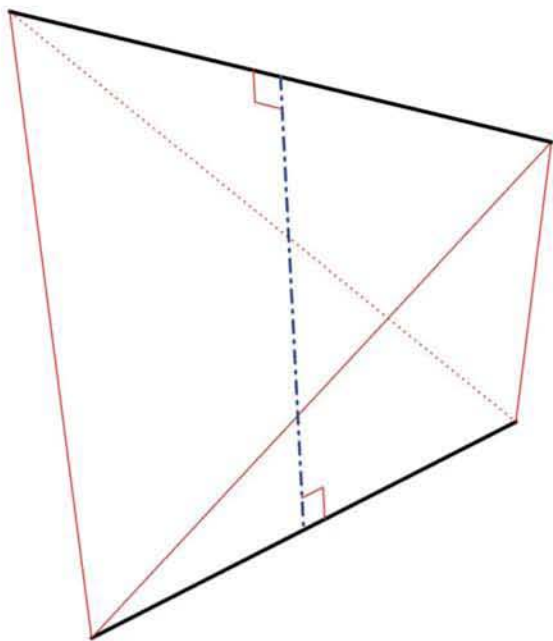
ARISTA APOYADA Y SECCION PRINCIPAL VERTICAL



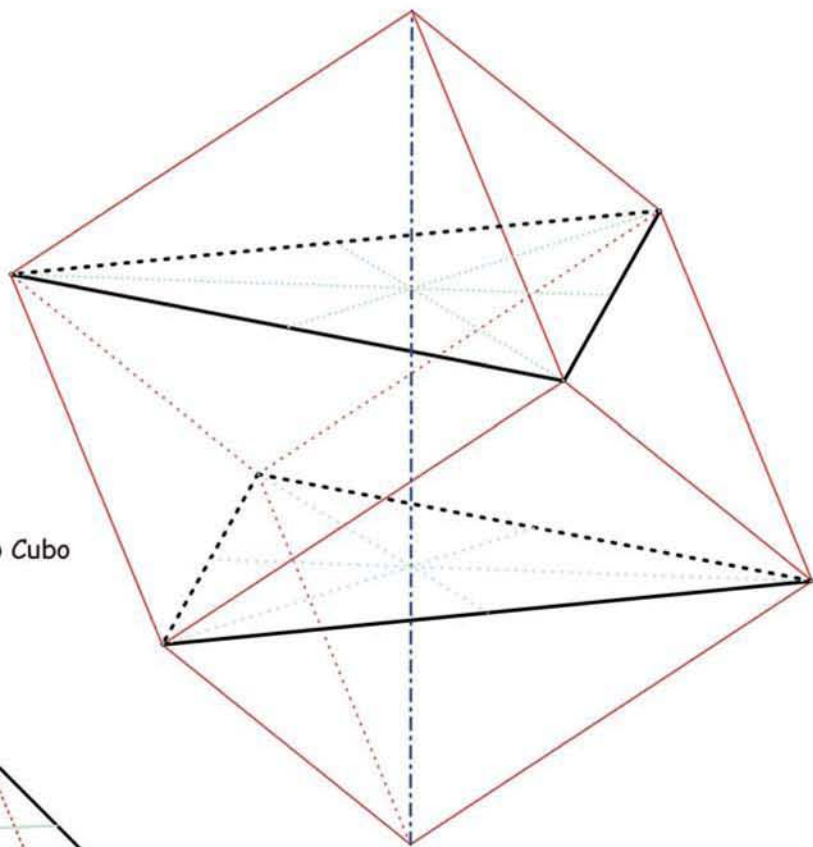
CARA APOYADA



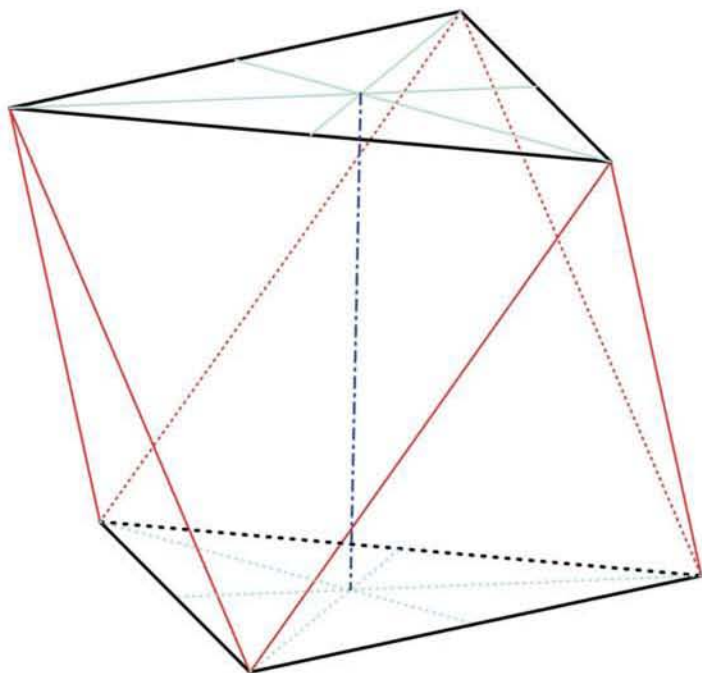
Estructuras Fundamentales



Tetraedro

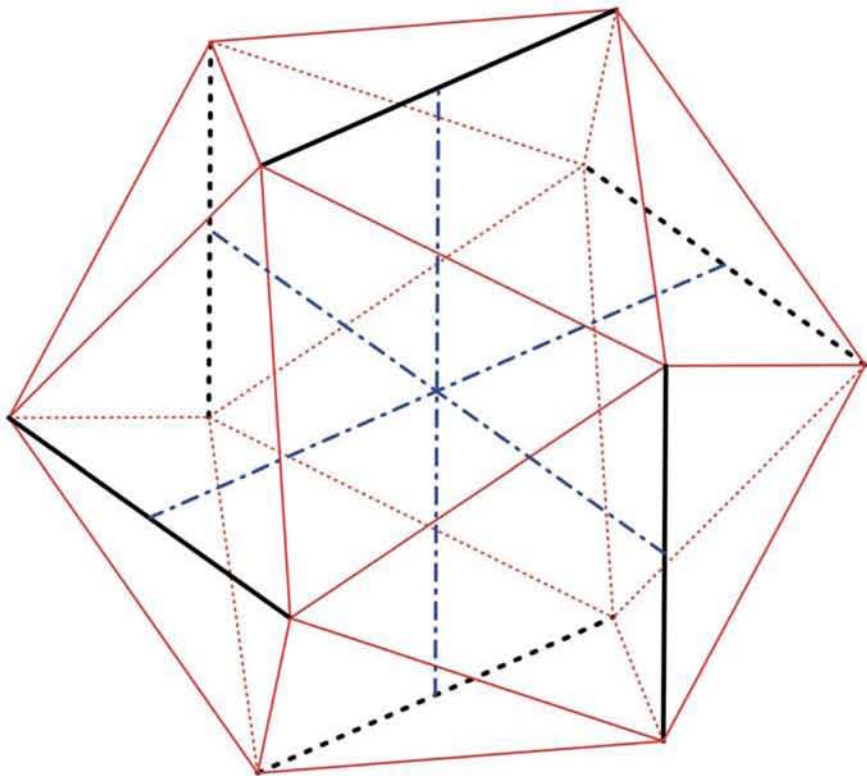
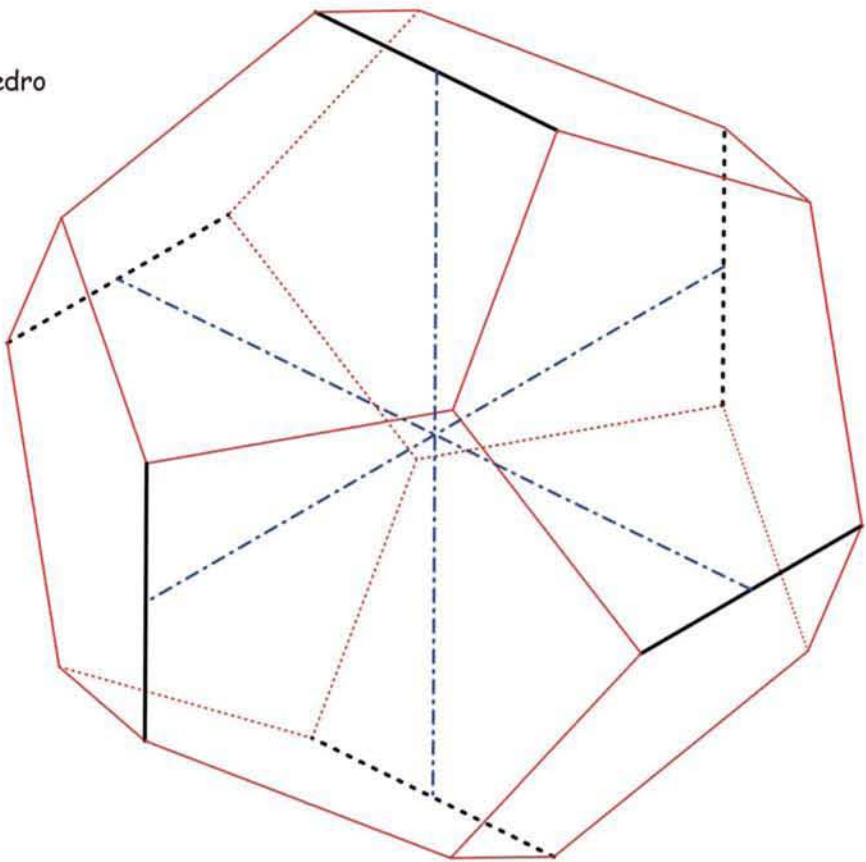


Hexaedro o Cubo



Octaedro

Dodecaedro



Icosaedro