4. Determinantes.

1 Preliminares sobre permutaciones.

Definición 1.1 *Dado un número natural n llamamos* **conjunto de permutaciones de n elementos** *y lo denotamos por $Perm(n)$ al conjunto de reordenaciones posibles de los números enteros $1, \dots, n$.*

A los elementos de $Perm(n)$ se les denomina **permutaciones.**

De esta forma dar un elemento de $Perm(n)$ es dar una aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \{1,\dots,n\} & \longrightarrow & \{1,\dots,n\} \\ & 1 & \longrightarrow & \sigma(1) \\ & \vdots & & \vdots \\ & n & \longrightarrow & \sigma(n) \end{array}$$

de manera que $\sigma(i)$ indica que número colocamos en la posición i-ésima.

Sabemos que n elementos pueden ordenarse de $n!$ maneras distintas, por lo que el conjunto $Perm(n)$ tiene $n!$ elementos.

Dada una permutación σ podemos considerar la **permutación inversa** σ^{-1} que no es más que tomar la aplicación inversa de σ.

Definición 1.2 *Llamamos* **trasposición** *a una permutación que mantiene todos los elementos en el mismo orden excepto dos de ellos que son intercambiados.*

Puede probarse que toda permutación se descompone en composición de trasposiciones. Esto nos permite definir lo siguiente:

Definición 1.3 *Dada una permutación σ llamamos* **signatura** *de σ y la denotamos por $\epsilon(\sigma)$ al número:*

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^k$$

donde k es el número de trasposiciones en que puede descomponerse σ.

Puede comporbarse, que aunque el número de trasposiciones en que puede descomponerse σ no es único, si lo es su paridad. De esta forma si una permutación es composición de un número par de trasposiciones, su signatura será 1; por el contrario si es composición de un número impar de trasposiciones, su signatura será -1.

Por otra parte dada una descomposicíon en trasposiciones de una permutación σ, parace claro que la permutación inversa σ^{-1} se obtiene componiendo la inversa de las trasposiciones. Por tanto la signatura de una permutación y la de su inversa coinciden:

$$\epsilon(\sigma) = \epsilon(\sigma^{-1}).$$

2 Determinante de una matriz cuadrada.

2.1 Definición.

Dada una matriz cuadrada A, llamaremos A_i a cada una de sus filas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \qquad A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}).$$

Definición 2.1 *El* **determinante** *de una matriz cuadrada A es una aplicación del conjunto de matrices cuadradas sobre el cuerpo $\mathbb{K}$:*

$$\mathcal{M}_{n\times n} \longrightarrow \mathbb{K}; \quad |A| = det(A_1, A_2, \dots, A_n) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

verificando las siguientes condición para cualesquiera $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$:

1. *Es una aplicación multilineal:*

$$det(A_1, \dots, A_i + A_i', \dots A_n) = det(A_1, \dots, A_i, \dots A_n) + det(A_1, \dots, A_i', \dots A_n).$$

$$det(A_1, \dots, \alpha A_i, \dots A_n) = \alpha \cdot det(A_1, \dots, A_i, \dots A_n), \ \textit{para cualquier } \alpha \in \mathbb{K}.$$

2. *Es una aplicación antisimétrica:*

$$det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n) = -det(A_1, \dots, A_j, \dots, A_i, \dots, A_n).$$

3. $|I_n| = 1$.

2.2 Propiedades.

1. El determinante de una matriz con dos filas iguales es 0:

$$det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_i, \dots, A_n) = 0.$$

Prueba: Como consecuencia de la condición de antisimetría:

$$det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_i, \dots, A_n) = -det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_i, \dots, A_n)$$

y por tanto:

$$2det(A_1, \dots, A_i, \dots, A_i, \dots, A_n) = 0.$$

2. El determinante de una matriz con una fila nula es 0:

$$det(A_1, \ldots, 0, \ldots, A_n) = 0.$$

Prueba Por la multilinealidad del determinante:

$$det(A_1, \ldots, 0, \ldots, A_n) = 0 \cdot det(A_1, \ldots, 0, \ldots, A_n) = 0.$$

3. Si a una fila se le suma otra multiplicada por un escalar el determinante no varía:

$$det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j + \lambda \cdot A_i, \ldots, A_n) = det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n).$$

Prueba: Utilizamos la multilinealidad del determinante y la primera de las propiedades enumeradas:

$$\begin{aligned} & det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j + \lambda \cdot A_i, \ldots, A_n) = \\ & = det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + \lambda\, det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_i, \ldots, A_n) = \\ & = det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n). \end{aligned}$$

2.3 Cálculo del determinante.

Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ una matriz cuadrada n-dimensional.

Denotamos por E_i a la fila formada por un 1 en la posición i-ésima y 0 en el resto:

$$E_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0).$$

Con esta notación:

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_j.$$

Ahora calculemos el determinate de A:

$$det(A) = det(A_1, A_2, \ldots, A_n) = det(\sum_{i_1=1}^{n} a_{1i_1} E_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{2i_2} E_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{ni_n} E_{i_n})$$

Teniendo en cuenta la multilinealidad del determinante obtenemos:

$$det(A) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n=1}^{n} a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots a_{ni_n} \cdot det(E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{in}).$$

Ahora en la expresión $det(E_{i1}, E_{i2}, \ldots, E_{in})$ si aparecen dos filas repetidas el determinante es cero, en otro caso siempre podemos reordenar las filas como $det(E_1, E_2, \ldots, E_n)$, teniendo en cuenta que por cada cambio de posición de dos filas la expresión cambia de signo. Como consecuencia de esto y con la notación descrita en la sección preliminar del capítulo, la fórmula del determinante queda:

$$\boxed{det(A) = \sum_{\sigma\in Perm(n)} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)}}$$

2.4 Determinante de la matriz traspuesta.

Teorema 2.2 *Si A es una matriz cuadrada n-dimensional:*

$$det(A) = det(A^t)$$

Prueba: Utilizamos la fórmula obtenida en la sección anterior:

$$\begin{aligned} |A^t| & = \sum_{\sigma\in Perm(n)} \epsilon(\sigma) (A^t)_{1\sigma(1)} (A^t)_{2\sigma(2)} \ldots (A^t)_{n\sigma(n)} = \\ & = \sum_{\sigma\in Perm(n)} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}. \end{aligned}$$

Ahora reescribimos cada monomio anterior utilizando la permutación inversa de cada σ. Recordemos que la signatura de una permutación y de su inversa coinciden. Queda:

$$|A^t| = \sum_{\sigma\in Perm(n)} \epsilon(\sigma^{-1}) a_{1\sigma^{-1}(1)} a_{2\sigma^{-1}(2)} \ldots a_{n\sigma^{-1}(n)}.$$

Finalmente si en el sumatorio anterior σ recorre todas las permutaciones posibles de n elementos, entonces σ^{-1} también recorre todas las permutaciones de n elementos y así:

$$det(A^t) = \sum_{\rho\in Perm(n)} \epsilon(\rho) a_{1\rho(1)} a_{2\rho(2)} \ldots a_{n\rho(n)} = det(A).$$

■

Como consecuencia del teorema anterior:

Todas las propiedades de los determinantes ciertas para filas son también válidas para columnas.

2.5 Determinante del producto de matrices.

Teorema 2.3 *Sean A, B dos matrices cuadradas n dimensionales. Entonces:*

$$det(AB) = det(A) det(B).$$

Prueba: Denotamos por $C = AB$ a la matriz producto de A y B. Sabemos que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \quad \text{y por tanto} \quad C_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} B_k.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} |C| & = det(C_1, C_2, \ldots, C_n) = det(\sum_{k_1}^{n} a_{1k_1} B_{k_1}, \sum_{k_2}^{n} a_{1k_2} B_{k_2}, \ldots, \sum_{k_n}^{n} a_{1k_n} B_{k_n}) = \\ & = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_n}^{n} a_{1k_1} a_{1k_2} \ldots a_{1k_n} det(B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_n}). \end{aligned}$$

Pero si algún $k_i = k_j$ entonces $det(B_{k_1}, B_{k_2}, \ldots, B_{k_n})$ es nulo. Nos quedamos sólo con los términos donde aparecen los índices $k_1, \ldots, k_n$ tomando todos los posibles valores entre 1 y n, pero quizá en otro orden. Es decir, esos índices determinan una permutación de n elementos de manera que ahora la expresión anterior se escribe como:

$$|C| = \sum_{\sigma \in Perm(n)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} det(B_{\sigma(1)}, B_{\sigma(2)}, \ldots, B_{\sigma(n)})$$

Reordenamos las filas $B_{\sigma(1)}, B_{\sigma(2)}, \ldots, B_{\sigma(n)}$ como $B_1, \ldots, B_n$ teniendo en cuenta que por cada cambio de posición de dos índices el determinante cambia de signo. Obtenemos:

$$|C| = \sum_{\sigma \in Perm(n)} \epsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} det(B_1, B_2, \ldots, B_n) = det(A)det(B).$$

3 Desarrollo de un determinante por menores.

3.1 Menores de una matriz.

Definición 3.1 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ se llama* **menor de orden** r *de dicha matriz al determinante que se obtiene quedándonos con los elementos de las r filas y r columnas que se indiquen:*

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_r \\ j_1 j_2 \ldots j_r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \ldots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix}$$

con $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ y $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$.

3.2 Adjuntos de una matriz.

Definición 3.2 *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ se llama* **adjunto** A_{ij} *al menor obtenido de suprimir la fila i-ésima y la columna j-ésima multiplicado por el factor $(-1)^{i+j}$.*

Se cumple la siguiente propiedad:

Proposición 3.3 *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$:*

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Prueba: Llamamos B a la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Utilizando la fórmula para el determinante tenemos:

$$|B| = \sum_{\sigma \in Perm(n)} \epsilon(\sigma) b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \ldots b_{n\sigma(n)}$$

Pero $b_{ij} = 0$ si $i = 1$ y $j > 1$. Además $b_{11} = 1$. Si σ es una permutación que cambia de posición el uno ($\sigma(1) \neq 1$) entonces $b_{1\sigma(1)} = 0$ y el correspondiente término del sumatorio se anula. Teniendo en cuenta esto, podemos quedarnos únicamente con las permutaciones que dejan fijo el 1. Estas pueden entenderse como permutaciones sólo de los números $2, \ldots, n$,de manera que obtenemos:

$$\begin{aligned} |B| &= \textstyle\sum_{\sigma \in Perm(2,\ldots,n)} \epsilon(\sigma) b_{2\sigma(2)} b_{3\sigma(3)} \ldots b_{n\sigma(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in Perm(2,\ldots,n)} \epsilon(\sigma) a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} \ldots a_{n\sigma(n)} = A_{11}. \end{aligned}$$

■

Corolario 3.4 *Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$:*

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1\,1} & \ldots & a_{i-1\,j} & \ldots & a_{i-1\,n} \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ a_{i+1\,1} & \ldots & a_{i+1\,j} & \ldots & a_{i+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Prueba: Basta aplicar el resultado anterior teniendo en cuenta que podemos mover la fila i-ésima y columna j-ésima hasta la posición $1,1$. Para ello hacemos $i-1, j-1$ cambios de signo, por lo que aparece el término:

$$(-1)^{i-1+j-1} = (-1)^{i+j}.$$

■

3.3 Desarrollo del determinante por filas y por columnas.

Veamos como calcular un determinante de una matriz cuadrada A **desarrollando por la fila i-ésima**:

$$\begin{aligned} |A| &= det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n) = \\ &= det(A_1, \ldots, a_{i1}E_1 \ldots + a_{in}E_n, \ldots, A_n) = \\ &= a_{i1} det(A_1, \ldots, E_1, \ldots, A_n) + \ldots + a_{in} det(A_1, \ldots, E_n, \ldots, A_n) \\ &= a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}. \end{aligned}$$

Deducimos la siguientes fórmula para el cálculo de un determinante desarrollando por la fila i-ésima:

$$\boxed{|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}}$$

y la análoga desarrollando por la columna j-ésima:

$$\boxed{|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}}$$

La importancia de ambas fórmulas es que nos permiten reducir el cálculo de un determinante n-dimensional a uno $n-1$-dimensional, pudiendo repetir esta reducción de la dimensión del problema cuantas veces deseemos.

4 Rango de una matriz.

Definición 4.1 *Dada una matriz A definimos el* **rango de una matriz** *como el mayor orden de todos los menores de A distintos de* 0.

Como consecuencia de las propiedades del determinante se verifica:

1. El rango de una matriz coincide con el de su traspuesta.
2. Si efectuamos operaciones elementales fila o columna sobre una matriz su rango no varía.

5 Inversa de una matriz.

El uso de determinantes nos proporciona un método para calcular la inversa de una matriz cuadrada A. Observemos que una condición necesaria para que una matriz cuadrada A tenga inversa es que su determinante sea no nulo, ya que:

$$A \cdot A^{-1} = Id \quad \Rightarrow \quad det(A)det(A^{-1}) = 1 \quad \Rightarrow \quad det(A) \neq 0 \text{ y } det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}.$$

Introducimos la siguiente definición:

Definición 5.1 *Dada una matriz cuadrada A llamamos* **matriz adjunta** *de A a la traspuesta de la matriz de adjuntos:*

$$(adjA) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Calculemos ahora el producto:

$$B = A \cdot (adjA).$$

Se tiene:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(adjA)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}.$$

Si $i = j$:

$$b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = |A|.$$

Si $i \neq j$,

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} = |C|,$$

donde C es una matriz igual a la matriz A, salvo en la fila j-ésima que es tomada igual a la i-ésima. Como consecuencia de esto $|C| = 0$ y queda:

$$A \cdot (adjA) = |A|Id.$$

Por otra parte:

$$(adjA) \cdot A = (A^t \cdot (adjA)^t)^t = (A^t \cdot (adjA^t))^t = |A^t|Id^t = |A|Id$$

Por tanto **si** $|A| \neq 0$:

$$\left.\begin{array}{l} A \cdot \frac{1}{|A|}(adjA) = Id \\ \frac{1}{|A|}(adjA) \cdot A = Id \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA).$$

Como consecuencia de todo esto se verifica el siguiente teorema:

Teorema 5.2 *Sea A una matriz cuadrada n-dimensional. A es inversible (o regular; o no singular) si y sólo si su determinante es no nulo. En ese caso se verifica:*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adjA)} \qquad y \qquad \boxed{|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}}$$