# 2. Ortogonalidad.

**En todo el capítulo trabajaremos sobre un espacio vectorial euclídeo $U$.**

## 1 Vectores ortogonales.

**Definición 1.1** *Dos vectores $\bar{x}, \bar{y} \in U$ se dicen* **ortogonales** *si:*

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 0.$$

Veamos algunas propiedades derivadas de esta definición:

1. *El único vector ortogonal consigo mismo es el $\bar{0}$.*
   **Prueba:** Basta tener en cuenta que el producto escalar corresponde a una forma cuadrática definida positiva. Por tanto:
   $$\bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \iff \bar{x} = \bar{0}.$$
2. *Dos vectores no nulos son ortogonales si y sólo si forman un ángulo de $\frac{\pi}{2}$.*
   **Prueba:** Si $\bar{x}, \bar{y}$ son dos vectores no nulos:
   $$\bar{x}, \bar{y} \text{ ortogonales} \iff \bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \iff cos(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{\|\bar{x}\|\|\bar{y}\|} = 0 \iff \angle(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\pi}{2}.$$
3. **Teorema de Pitágoras.** *Dos vectores $\bar{x}, \bar{y}$ son ortogonales si y sólo si*
   $$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2.$$

   **Prueba:** Basta tener en cuenta que:
   $$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = (\bar{x} + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \|\bar{x}\|^2 + \|\bar{y}\|^2 + 2\bar{x} \cdot \bar{y}.$$

## 2 Sistemas ortogonales.

### 2.1 Definición

**Definición 2.1** *Un sistema de vectores $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ se dice* **ortogonal**, *si los vectores que lo forman son ortogonales dos a dos:*

$$\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = 0 \qquad \textit{para cualesquiera } i \neq j,\ i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

**Definición 2.2** *Un sistema de vectores $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ se dice* **ortonormal**, *si es ortogonal y todos los vectores son unitarios:*

$$\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = \delta_i^j \qquad \textit{para cualesquiera } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

**Proposición 2.3** *Un sistema ortogonal que no contenga al vector $\bar{0}$ es un sistema libre.*

**Prueba:** Supongamos que $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ es un sistema ortogonal con todos los vectores no nulos. Supongamos que existen escalares $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ verificando:

$$\alpha^1 \bar{u}_1 + \ldots + \alpha^n \bar{u}_n = \bar{0}.$$

Si hacemos el producto escalar por un vector $\bar{u}_j$ queda:

$$(\alpha^1 \bar{u}_1 + \ldots + \alpha^n \bar{u}_n) \cdot \bar{u}_j = \bar{0} \cdot \bar{u}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^1 \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_j + \ldots + \alpha^n \bar{u}_n \cdot \bar{u}_j = \bar{0}$$

Teniendo en cuenta que es un sistema ortogonal, $\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = 0$ si $i \neq q$. Queda por tanto:

$$\alpha^j \bar{u}_j \cdot \bar{u}_j = 0.$$

Como $\bar{u}_j \neq 0$, entonces $\bar{u}_j \cdot \bar{u}_j \neq 0$ y obtenemos que $\alpha^j = 0$ para cualquier $j \in \{1, \ldots, n\}$. ■

### 2.2 Bases ortogonales.

**Definición 2.4** *Una* **base ortogonal** *es una base que es un sistema ortogonal.*

De la definición de sistema ortogonal se deduce claramente que:

$$\boxed{B \textbf{ es base ortogonal} \iff \textbf{Matriz de Gram } G_B \textbf{ es diagonal}}$$

**Definición 2.5** *Una* **base ortonormal** *es una base que es un sistema ortonormal.*

De la definición de sistema ortonormal se deduce que:

$$\boxed{B \textbf{ es base ortonormal} \iff \textbf{Matriz de Gram } G_B \textbf{ es la identidad}}$$

En el estudio de las formas cuadráticas simétricas se vio que todas son diagonalizables por congruencia. Si además son definidas positivas, entonces son congruentes a la matriz identidad. Aplicando este hecho a un espacio euclídeo deducimos:

**Teorema 2.6** *Todo espacio euclídeo tiene una base ortonormal.*

### 2.3 Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

El método nos proporciona un sistema para calcular una base ortogonal $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ a partir de una base cualquiera $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$.

El procedimiento es el siguiente:

1. Tomamos $\bar{u}_1 = \bar{e}_1$.
2. Construimos $\bar{u}_2 = \bar{e}_2 + \alpha_2^1 \bar{u}_1$.
   Para hallar el parámetro $\alpha_2^1$ exigimos que $\bar{u}_2$ sea ortogonal con $\bar{u}_1$:
   $$\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 \cdot \bar{u}_1 = -\alpha_2^1 \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2^1 = -\frac{\bar{e}_2 \cdot \bar{u}_1}{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1}.$$
   Ahora $\mathcal{L}\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\} = \mathcal{L}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$.
3. Construimos $\bar{u}_3 = \bar{e}_3 + \alpha_3^1 \bar{u}_1 + \alpha_3^2 \bar{u}_2$.
   Para hallar los parámetros exigimos que $\bar{u}_3$ sea ortogonal con $\bar{u}_1, \bar{u}_2$:
   $$\bar{u}_3 \cdot \bar{u}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \bar{e}_3 \cdot \bar{u}_1 + \alpha_3^1 \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 + \alpha_3^2 \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3^1 = -\frac{\bar{e}_3 \cdot \bar{u}_1}{\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1}.$$
   $$\bar{u}_3 \cdot \bar{u}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \bar{e}_3 \cdot \bar{u}_2 + \alpha_3^1 \bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 + \alpha_3^2 \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_3^2 = -\frac{\bar{e}_3 \cdot \bar{u}_2}{\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2}.$$
   Ahora $\mathcal{L}\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} = \mathcal{L}\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.
4. Continuamos este proceso hasta completar la base. **En concreto el paso $k$-ésimo es de la siguiente forma:**
   **Construimos $\bar{u}_k = \bar{e}_k + \alpha_k^1 \bar{u}_1 + \ldots + \alpha_k^{k-1} \bar{u}_{k-1}$ con:**
   $$\boxed{\alpha_k^i = -\frac{\bar{e}_k \cdot \bar{u}_i}{\bar{u}_i \cdot \bar{u}_i}} \quad , \qquad i = 1, \ldots, k-1,$$
   **donde $\mathcal{L}\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_k\} = \mathcal{L}\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_k\}$.**
   Es interesante observar que todas estas expresiones tienen sentido porque los $\bar{u}_i$ son vectores independientes. En particular son no nulos y $\bar{u}_i \cdot \bar{u}_i \neq 0$.
   Por otra parte también vemos, que si $\bar{e}_k$ ya es ortogonal a $\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{k-1}$, entonces $\bar{u}_k = \bar{e}_k$.

Este método también nos sirve para construir una base **ortonormal**. Para ello simplemente hay que **normalizar** la base obtenida. En general, si $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ es una base *ortogonal*, entonces:
$$\{\frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|}, \ldots, \frac{\bar{u}_n}{\|\bar{u}_n\|}\}$$
es una base **ortonormal**. A este proceso se le llama **normalización.**

## 2.4 Teorema de la base ortogonal incompleta.

**Teorema 2.7** *Sea $U$ un espacio euclídeo $n$-dimensional. Si $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p\}$ es un sistema ortogonal de $p$ vectores no nulos, con $p < n$, entonces existe un sistema de vectores $\{\bar{u}_{p+1,}, \ldots, \bar{u}_n\}$ cuya unión con el primero:*
$$\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p, \bar{u}_{p+1,}, \ldots, \bar{u}_n\}$$
*es una base ortogonal.*

**Prueba:** Dado el sistema $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p\}$, sabemos que podemos completarlo hasta una base de $U$:
$$\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p, \bar{e}_{p+1,}, \ldots, \bar{e}_n\}$$
Ahora aplicamos el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a esta base. Los $p$ primeros vectores no quedan modificados porque ya forma un sistema ortogonal. De esta forma obtendremos una base ortogonal:
$$\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p, \bar{u}_{p+1,}, \ldots, \bar{u}_n\}.$$

# 3 Singularidades de las bases ortonormales.

En esta sección veremos las ventajas de trabajar en una base ortonormal en espacios eculídeos.

## 3.1 Matriz de Gram en una base ortonormal.

**Teorema 3.1** *La matriz de Gram de un producto escalar respecto a una base ortonormal es la identidad.*

**Prueba:** Si $B = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ es una base ortonormal, entonces:
$$(G_B)_{ij} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_j = \delta_{ij} \quad \Rightarrow \quad G_B = Id.$$

## 3.2 Expresión del producto escalar en una base ortonormal.

Si $B = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ es una base ortonormal y $\bar{x}, \bar{y}$ son vectores de coordenadas $(x^i), (x^j)$ respecto a esta base, entonces:
$$\boxed{\bar{x} \cdot \bar{y} = \begin{pmatrix} x^1 & \ldots & x^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}} \qquad \text{ó} \qquad \boxed{\bar{x} \cdot \bar{y} = (x)\{y\}}$$

Por tanto la norma de un vector queda:
$$\boxed{\|\bar{x}\| = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}}$$

## 3.3 Coordenadas covariantes respecto a una base ortonormal.

**Teorema 3.2** *Respecto a una base ortonormal las coordenadas covariantes de un vector coinciden con las contravariantes.*

**Prueba:** Basta tener en cuenta que la matriz de Gram respecto a la base ortonormal es la identidad.

## 3.4 Relación entre bases ortonormales.

Sean $B$ y $B'$ dos bases ortonormales de $U$:

$$B = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}; \qquad B' = \{\bar{e}'_1, \ldots, \bar{e}'_n\}.$$

Sabemos que:

$$G_{B'} = M_{B'B} G_B {M_{B'B}}^t$$

Además por ser bases ortonormales $G_B = G_{B'} = Id$ por tanto deducimos que:

**Teorema 3.3** *La matriz de cambio de paso entre dos bases $B, B'$ ortonormales es ortogonal, es decir,:*

$$M_{B'B} {M_{B'B}}^t = Id.$$

Es interesante observar que el hecho de que una matriz sea ortogonal, siginifica que su inversa coincide con su traspuesta. Esto hace especialmente cómodo el cambio de base entre bases ortonormales.

# 4 Proyección ortogonal.

## 4.1 Subespacios ortogonales.

**Definición 4.1** *Dos subespacios euclídeos $S_1$ y $S_2$ de un espacio vectorial euclídeo $U$ se dicen* **ortogonales** *cuando todos los vectores de uno de ellos son ortogonales a todos los del otro:*

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = 0 \quad \textit{para cualesquiera} \quad \bar{x} \in S_1, \, \bar{y} \in S_2.$$

**Proposición 4.2** *Si $S_1$ y $S_2$ son dos subespacios euclídeos generados respectivamente por los vectores $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p\}$ y $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{u}_q\}$, entonces la condición necesaria y suficiente para que sean ortogonales es que:*

$$\bar{u}_i \cdot \bar{v}_j = 0 \quad \textit{para todo } i \in \{1, \ldots, p\}, \, j \in \{1, \ldots, q\}.$$

**Prueba:** La necesidad de la condición está clara. Veamos la suficiencia. Sean $\bar{x} \in S_1$, $\bar{y} \in S_2$. Hay que ver que si se cumple la condición del enunciado $\bar{x}, \bar{y}$ son ortogonales.

Estos vectores pueden escribirse como:

$$\bar{x} = \alpha^1 \bar{u}_1 + \ldots + \alpha^p \bar{u}_p; \quad \bar{y} = \beta^1 \bar{v}_1 + \ldots + \beta^q \bar{v}_q.$$

Entonces, por las propiedades del producto escalar:

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \alpha^i \beta^j \bar{u}_i \cdot \bar{v}_j.$$

Por hipótesis $\bar{u}_i \cdot \bar{v}_j = 0$, luego $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$.

## 4.2 Subespacio suplementario ortogonal.

**Definición 4.3** *Dado un espacio vectorial euclídeo $U$ y un subconjunto $V \subset U$, se llama* **subespacio ortogonal de** $V$ *a:*

$$V^{\perp} = \{\bar{x} \in U | \, \bar{x} \cdot \bar{v} = 0, \ \textit{para todo } \bar{v} \in V\}.$$

Obsevamos que esta definición equivale a la de espacio conjugado de $U$, vista en el capítulo sobre formas cuadráticas. Por tanto tenemos de manera inmediata las siguientes propiedades:

1. *$V^{\perp}$ es un subespacio vectorial.*
2. $V \subset W \quad \Rightarrow \quad W^{\perp} \subset V^{\perp}$.
3. *Si $V = \mathcal{L}\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p\}$ entonces $V^{\perp} = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p\}^{\perp}$.*
4. *Si $V$ es un subespacio vectorial, $V$ y $V^{\perp}$ son suplementarios.*
   **Prueba:** En primer lugar $V \cap V^{\perp} = \{0\}$, ya que:
   $$\bar{x} \in V \cap V^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} \cdot \bar{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \bar{0}.$$
   Veamos ahora que $V + V^{\perp} = U$. Sea $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p\}$ una base ortogonal de $V$. Por el teorema de la base incompleta ortogonal, podemos extenderla a una base ortogonal de todo $U$:
   $$\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_p, \bar{v}_{p+1}, \ldots, \bar{v}_n\}$$
   Dado que $\bar{v}_i \cdot \bar{v}_j = 0$ para $i \in \{1, \ldots, p\}$, $j \in \{p+1, \ldots, n\}$ se tiene que:
   $$\bar{v}_j \in V^{\perp}, \quad \text{para } j \in \{p+1, \ldots, n\}$$
   y por tanto:
   $$\mathcal{L}\{\bar{v}_{p+1}, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V^{\perp} \quad \Rightarrow \quad dim(V^{\perp}) \geq n - p$$
   Entonces:
   $$n \geq dim(V + V^{\perp}) = dim(V) + dim(V^{\perp}) - dim(V \cap V^{\perp}) \geq p + n - p = n$$
   luego
   $$dim(V + V^{\perp}) = n \quad \Rightarrow \quad V + V^{\perp} = U.$$

### 4.3 Aplicación proyección ortogonal.

**Definición 4.4** *Dado un subespacio $V$ de un espacio euclídeo $U$ definimos la* **proyección ortogonal sobre** $V$ *como la aplicación:*

$$\begin{array}{rccc} p_V: & U & \longrightarrow & U \\ & \bar{x} & \longrightarrow & \bar{x}_1 \end{array} \qquad \textit{donde} \quad \bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \quad \textit{con} \quad \bar{x}_1 \in V, \bar{x}_2 \in V^{\perp}.$$

La definición anterior tiene sentido porque hemos visto que $V$ y $V^{\perp}$ son subespacios vectoriales suplementarios.

# 5 Endomorfismos simétricos.

## 5.1 Definición.

**Definición 5.1** *Sea $U$ un espacio euclídeo. Un endomorfismo $f : U \longrightarrow U$ se dice* **simétrico** *si:*

$$\bar{x} \cdot f(\bar{y}) = \bar{y} \cdot f(\bar{x}).$$

Si $B = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ es una base de $U$, $G_B$ es la matriz de Gram con respecto a esa base y $F_B$ es la matriz de un endomorfismo respecto a $B$, la condición de simetría se escribe como sigue:

$$\begin{array}{rl} \bar{x} \cdot f(\bar{y}) = \bar{y} \cdot f(\bar{x}) & \iff \bar{x} \cdot f(\bar{y}) = f(\bar{x}) \cdot \bar{y} \iff \\ & \iff (x)G_B((y)F_B)^t = (x)F_B G_B\{y\} \iff \\ & \iff (x)G_B {F_B}^t\{y\} = (x)F_B G_B\{y\} \end{array}$$

para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in U$ de coordenadas respecto a la base $B$, respectivamente $(x^i), (y^i)$.

Por tanto:

$$\boxed{f \text{ endomorfismo simétrico} \iff G_B {F_B}^t = F_B G_B}$$

En particular si $B$ es una base ortonormal:

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ endomorfismo simétrico} \iff {F_B}^t = F_B \iff F_B \text{ es simétrica} \\ \\ (\text{siendo } B \text{ una base } \textbf{ortonormal}) \end{array}}$$

## 5.2 Autovalores y autovectores de un endomorfismo simétrico.

**Proposición 5.2** *Sea $f : U \longrightarrow U$ un endomorfismo simétrico. Si $\lambda$ y $\mu$ son autovalores diferentes, entonces los subespacios característicos $S_\lambda$ y $S_\mu$ son ortogonales.*

**Prueba:** Sea $\bar{x} \in S_\lambda$, $\bar{y} \in S_\mu$ vectores no nulos. Por ser simétrico se tiene:

$$\bar{x} \cdot f(\bar{y}) = \bar{y} \cdot f(\bar{x}).$$

Por ser $\bar{x}$, $\bar{y}$ autovectores asociados respectivamente a $\lambda, \mu$ queda:

$$\bar{x} \cdot (\mu\bar{y}) = \bar{y} \cdot (\lambda\bar{x}) \quad \Rightarrow \quad (\lambda - \mu)\bar{x} \cdot \bar{y} = 0.$$

Teniendo en cuenta que $\lambda \neq \mu$ vemos que $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$ y por tanto ambos vectores son ortogonales.

**Teorema 5.3** *Cualquier matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tiene $n$ autovalores reales (contados con multiplicidad).*

**Prueba:** Sabemos que siempre hay exactamente $n$ autovalores complejos, correspondiente a las $n$ soluciones del polinomio característico de $A$. Hay probar que todos ellos son reales. Supongamos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor y sea $\bar{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{C}^n$ un autovector no nulo asociado. Denotamos por $c(\bar{x})$ el conjugado del vector $\bar{x}$ cuyas componentes son las conjugadas de cada componente de $\bar{x}$.

Recordemos que el conjugado de un número complejo $a+b\imath$ es $a-b\imath$. Utilizaremos:

- Un número complejo es real si y sólo si coincide con su conjugado.

- La conjugación se "comporta bien" con la suma y producto de números complejos.

- El producto de un número complejo no nulo por su conjugado es un número real positivo:

$$(a + b\imath)(a - b\imath) = a^2 + b^2 > 0.$$

En nuestro caso tenemos:

$$(x)A = \lambda(x) \quad \Rightarrow \quad (x)Ac(x)^t = \lambda(x)c(x)^t \tag{1}$$

Por otra parte conjugando la expresión anterior y teniendo en cuenta que por ser $A$ real $c(A) = A$:

$$c(x)c(A) = c(\lambda)c(x) \quad \Rightarrow \quad c(x)A = c(\lambda)c(x) \quad \Rightarrow \quad c(x)A(x)^t = c(\lambda)c(x)(x)^t.$$

Teniendo en cuenta que $A$ es simétrica, si trasponemos la expresión anterior queda:

$$(x)Ac(x)^t = c(\lambda)(x)c(x^t).$$

La comparamos con la ecuación (1) y obtenemos:

$$\lambda(x)c(x)^t = c(\lambda)(x)c(x)^t \quad \Rightarrow \quad (\lambda - c(\lambda))(x)c(x)^t = 0.$$

Pero teniendo en cuenta que $\bar{x} \neq 0$:

$$(x)c(x)^t = x^1c(x^1) + \ldots + x^nc(x^n) > 0.$$

Deducimos que $\lambda - c(\lambda) = 0$, es decir, $\lambda$ concide con su conjugado y por tanto es un número real. ■

**Teorema 5.4** *Todo endomorfismo simétrico de un espacio euclídeo n-dimensional tiene n autovalores reales (contados con multiplicidad).*

**Prueba:** Basta tener en cuenta que con respecto a una base ortonormal, la matriz de un endomorfismo simétrico es simétrica. Ahora el teorema es consecuencia del resultado anterior. ∎

## 5.3 Base ortonormal de autovectores.

**Teorema 5.5** *Sea $U$ un espacio euclídeo n-dimensional. Si $f$ es un endomorfismo simétrico entonces existe una base ortonormal de autovectores de $f$.*

**Prueba:** Probaremos que siempre existe una base ortogonal de autovectores. El paso a una ortonormal es inmediato mediante el proceso de normalización.

Por el teorema anterior sabemos que hay exactamente $n$ autovalores reales (contados con multiplicidad):

$$\left.\begin{array}{c}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_k\end{array}\right\}\quad \text{con multiplicidades algebraicas}\quad \left\{\begin{array}{c}m_1\\ \vdots\\ m_k\end{array}\right.$$

de manera que $m_1 + \ldots + m_k = n$. Sabemos que los espacios característicos son una suma directa:

$$V = S_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus S_{\lambda_k}.$$

Además cada uno de ellos es ortogonal a los demás. Escogiendo para cada uno de ellos una base ortogonal, contruimos una base de autovectores ortogonal del subespacio $V$:

$$\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_p\}$$

El problema es probar que $V$ es en realidad todo el subespacio $U$. Nos fijamos que **cualquier autovector de $f$ tiene que estar contenido en $V$.**

Supongamos que $V \neq U$. Consideramos el espacio $V^{\perp}$. Sea $\bar{x} \in V^{\perp}$, veamos que $f(\bar{x}) \in V^{\perp}$. Para ello hay que comprobar que $f(\bar{x})\cdot\bar{u}_i = 0$ para cualquier $i = 1, \ldots, p$:

$$\begin{array}{ccccccc} f(\bar{x})\cdot\bar{u}_i & = & \bar{x}\cdot f(\bar{u}_i) & = & \bar{x}\cdot\lambda\bar{u}_i & = & 0.\\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & f \text{ simétrico} & & \bar{u}_i \text{ autovector} & & \bar{x}\in V^{\perp} & \end{array}$$

Por tanto el subespacio $V^{\perp}$ es invariante por $f$. La restricción de $f$ a $V^{\perp}$:

$$g : V^{\perp} \longrightarrow V^{\perp}; \qquad g(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

vuelve a ser un endomorfismo simétrico. Tiene todos los autovalores reales y por tanto al menos un autovector no nulo. Pero esto contradice el hecho de que todos los autovectores están en $V$ y $V \cap V^{\perp} = \{0\}$. ∎

**Corolario 5.6** *Si $f$ es un endomorfismo simétrico de un espacio euclídeo, existe una base ortonormal respecto a la cual la matriz asociada es diagonal.*

**Prueba:** Basta aplicar el teorema anterior. Por ser $f$ simétrico, siempre existe una base ortonormal de autovectores; pero la matriz de un endomorfismo con respecto a una base de autovectores es diagonal. ∎

**Corolario 5.7** *Si $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ es una matriz* **simétrica:**

1. *$A$ tiene todos los autovalores reales.*
2. *$A$ es diagonalizable por semejanza.*
3. *Existe una base $\mathbb{R}^n$ de autovectores de $A$ ortonormal con el producto escalar usual.*
4. *Existe una matriz $P$ ortogonal (es decir, verificando $P^t = P^{-1}$) tal que:*

$$D = PAP^{-1}$$

*donde $D$ es la matriz diagonal formada por los autovalores.*