ÁLGEBRA **Soluciones a la Práctica 1**

Correspondencias y aplicaciones (Curso 2008–2009)

1.– *Dadas las siguientes correspondencias, determinar sus conjuntos origen, imagen, decidir si no son aplicaciones y, en caso de que lo sean, si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas. Calcular también las aplicaciones inversas de las que resulten ser biyectivas*

(a) $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto cos(x) + 1$.

Conjunto inicial$=\mathbb{R}$. **Conjunto origen**$=\mathbb{R}$, ya que el coseno está definido sobre cualquier número real.

Conjunto final$=\mathbb{R}$. **Conjunto imagen**$=[0, 2]$, ya que el coseno toma cualquier valor real comprendido entre -1 y 1 ambos inclusive. Al sumarle uno, nos quedamos entre 0 y 2.

f_1 **es una aplicación**, porque el conjunto inicial y el conjunto origen coinciden, y además para cada número real el coseno está definido de manera única, luego a cada elemento del conjunto origen le corresponde **exactamente un** elemento del conjunto imagen.

f_1 **NO es inyectiva**, porque existen ángulos diferentes con el mismo coseno. En concreto el seno es una función de período 2π, es decir, $cos(x) + 1 = cos(x + 2k\pi) + 1$ para cualquier número entero k.

f_1 **NO es sobreyectiva**, porque el conjunto imagen es diferente del conjunto final.

f_1 **NO es biyectiva**, porque no es inyectiva (o porque no es sobreyectiva).

(a') $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 2], x \mapsto cos(x) + 1$.

Es análogo al caso anterior; explicamos las diferencias.

Conjunto inicial$=\mathbb{R}$. **Conjunto origen**$=\mathbb{R}$.

Conjunto final$=[0, 2]$. **Conjunto imagen**$=[0, 2]$.

f_1 **es una aplicación**.

f_1 **NO es inyectiva**.

f_1 **SI es sobreyectiva**, porque el conjunto imagen *ahora* coincide con el final.

f_1 **NO es biyectiva**, porque no es inyectiva.

(a") $f_1 : [0, \pi] \longrightarrow [0, 2], x \mapsto cos(x) + 1$.

De nuevo vemos las diferencias con los casos anteriores.

Conjunto inicial$=[0, \pi]$. **Conjunto origen**$=[0, \pi]$, ya que el coseno está definido sobre cualquier número real entre 0 y π.

Conjunto final$=[0,2]$. **Conjunto imagen**$=[0,2]$, ya que para cualquier número $y \in [-1,1]$ siempre existe un ángulo comprendido entre 0 y π cuyo coseno es y.

f_1 **es una aplicación**.

f_1 **SI es inyectiva**, porque dos ángulos comprendidos en $[0,\pi]$ siempre tienen cosenos diferentes.

f_1 **SI es sobreyectiva**, porque el conjunto imagen es igual al conjunto final.

f_1 **SI es biyectiva**, porque no es inyectiva y sobreyectiva. La inversa es:

$$f_1^{-1} : [0,2] \longrightarrow [0,\pi]$$

definida como:

$$f^{-1}(y) = arcos(y-1).$$

(b) $f_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y$, si $y^2 = x$.

Conjunto inicial$=\mathbb{R}$. **Conjunto origen**$=\mathbb{R}^+$, ya que sólo si x es mayor o igual que 0 puede ser el cuadrado de un número real.

Conjunto final$=\mathbb{R}$. **Conjunto imagen**$=\mathbb{R}$, ya que dado cualquier $y \in \mathbb{R}$, siempre es la imagen por esta correspondencia de $x = y^2$.

f_2 **NO es una aplicación**. Porque el conjunto inicial y el conjunto origen no coinciden.

(b') $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y$, si $y^2 = x$.

Conjunto inicial$=\mathbb{R}^+$. **Conjunto origen**$=\mathbb{R}^+$, ya que sólo si x es mayor o igual que 0 puede ser el cuadrado de un número real.

Conjunto final$=\mathbb{R}$. **Conjunto imagen**$=\mathbb{R}$, ya que dado cualquier $y \in \mathbb{R}$, siempre es la imagen por esta correspondencia de $x = y^2$.

f_2 **NO es una aplicación**. Ahora el conjunto final e inicial coinciden. Sin embargo cada elemento no tiene una sóla imagen. En concreto se cumple que $(-1)^2 = 1 = (1^2)$ luego 1 y -1 son ambos imagen del 1.

(b") $f_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto y$, si $y^2 = x$.

Conjunto inicial$=\mathbb{R}^+$. **Conjunto origen**$=\mathbb{R}^+$.

Conjunto final$=\mathbb{R}^+$. **Conjunto imagen**$=\mathbb{R}^+$, ya que dado cualquier $y \in \mathbb{R}^+$, siempre es la imagen por esta correspondencia de $x = y^2$.

f_2 **SI es una aplicación**. Ahora el conjunto final e inicial coinciden. Además para cada $x \in \mathbb{R}^+$ existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^2 = x$; en concreto $y = +\sqrt{x}$.

Sabemos por tanto que la aplicación puede escribirse ahora como $f_2(x) = +\sqrt{(x)}$.

f_2 **SI es inyectiva.** Ya que dados $x, z \in \mathbb{R}^+$ cualesquiera, si $f_2(x) = f_2(z)$ entonces $\sqrt{(x)} = \sqrt{(z)}$ luego elevando al cuadrado obtenemos $x = z$.

f_2 **SI es sobreyectiva.** Ya que coincidien el conjunto final e imagen.

f_2 **SI es biyectiva.** Por ser inyectiva y sobreyectiva. Por tanto tiene inversa. Su inversa es:

$$f_2^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+, y \mapsto y^2$$

Es la inversa porque $f_2^{-1}(f(x)) = (\sqrt{x})^2 = x$ y $f_2(f_2^{-1}(y)) = +\sqrt{y^2} = |y| = y$, para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^+$, $y \in \mathbb{R}^+$.

(c) $f_3 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto tg(x)$.

Conjunto inicial=$\mathbb{R}$. **Conjunto origen=**$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, ya que la tangente está definida como $\frac{sin(x)}{cos(x)}$. Este cociente tiene sentido cuando el denominador es distinto 0, es decir en los puntos donde el coseno se anula. Esto ocurre cuando $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Conjunto final=$\mathbb{R}$. **Conjunto imagen=**$\mathbb{R}$, ya que la tangente puede tomar cualquier número real.

f_3 **NO es una aplicación**, porque el conjunto inicial y el conjunto origen NO coinciden.

(d) $f_4 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^9$.

Conjunto inicial=$\mathbb{R}$. **Conjunto origen=**$\mathbb{R}$, ya que existe la séptima potencia de culaquier número real.

Conjunto final=$\mathbb{R}$. **Conjunto imagen=**$\mathbb{R}$, ya que todo número real se puede expresar como séptima potencia de otro. En concreto, dado $y \in \mathbb{R}$, tomando $x = y^{1/9}$, se verifica que $x^9 = y$ y por tanto $f_4(x) = y$.

f_4 **es una aplicación**, ya que el conjunto inicial y el conjunto origen coinciden, y además para cada valor de x, la séptima potencia está definida de manera única.

f_4 **es inyectiva**, ya que si $x_1^9 = x_2^9$ entonces $x_1 = x_2$ (OJO: esto no sería cierto si el exponente fuese par ya que x y $-x$ elevados a exponente par dan el mismo resultado).

f_4 **es sobreyectiva**, ya que coinciden el conjunto final y el imagen.

f_4 **es biyectiva**, porque es inyectiva y sobreyectiva. La aplicación inversa es:

$$f_4^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^{1/9}$$

(e) $f_5 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n!$.

Conjunto inicial=$\mathbb{N}$. **Conjunto origen=**$\mathbb{N}$, ya que está definido el factorial de cualquier número natural.

Conjunto final=$\mathbb{R}$. **Conjunto imagen=**$\{k!, k \in \mathbb{N}\}$. En este caso escribimos el conjunto imagen simplemente utilizando la definición, ya que no hay forma más sencilla de expresarlo.

f_5 **es una aplicación**, ya que el conjunto inicial y el conjunto origen coinciden, y además para cada número natural el factorial está definido de manera única.

f_5 **es inyectiva**, ya que dos números distintos tienen distinto factorial. Veámoslo rigurosamente. Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Supongamos que son distintos. Entonces uno es mayor que el otro. Suponemos por ejemplo $m > n$. Entonces:

$$m! = 1.2.\ldots.n.(n+1).\ldots.m = n!(n+1).\ldots.m \text{ y por tanto } m! > n! \text{ y } f_5(m) \neq f_5(n).$$

f_5 **NO es sobreyectiva**, porque el conjunto final y el imagen son diferentes, ya que hay números naturales que no son factorial de ningún otro. De hecho, hemos visto que el factorial es una función creciente, es decir si $m > n$, $m! > n!$. Los factoriales de los primeros números son $1, 2, 6, \ldots$ luego vemos que quedan números (p.ej. $3, 4, 5$) que no son factorial de ningún otro.

f_5 **NO es biyectiva** porque no es sobreyectiva.

(f) $f_6 : \mathbb{R} \setminus \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}, x \mapsto \dfrac{2x-4}{x-3}$.

Conjunto inicial=$\mathbb{R} \setminus \{3\}$. **Conjunto origen=**$\mathbb{R} \setminus \{3\}$, ya que la fracción está bien definida cuando el denominador no se anula. Pero $x - 3 = 0 \iff x = 3$.

Conjunto final=$\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Para calcular el conjunto imagen hacemos lo siguiente. Dado $y \in \mathbb{R}$, vemos cuando existe un x tal que $f_6(x) = y$, es decir, cuando tiene solución la ecuación:

$$y = \frac{2x-4}{x-3}$$

Despejando x obtenemos $x = \dfrac{3y-4}{y-2}$. Vemos que esta expresión tiene sentido excepto cuando el denominador se anula, es decir, cuando $y = 2$. Por tanto: **Conjunto imagen=**$\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

f_6 **es una aplicación**, ya que el conjunto inicial y el conjunto origen coinciden y además para cada valor de x, la expresión de $f_6(x)$ está definida de manera única.

f_6 **es inyectiva**, ya que si $f_6(x_1) = f_6(x_2)$, o equivalentemente, $\dfrac{2x_1-4}{x_1-3} = \dfrac{2x_2-4}{x_2-3}$; operando obtenemos que $x_1 = x_2$. (OJO: hay que suponer $x_1, x_2 \neq 3$ para que las expresiones tengan sentido).

f_6 **es sobreyectiva**, ya que coinciden el conjunto final y el imagen.

f_6 **es biyectiva**, porque es inyectiva y sobreyectiva. La aplicación inversa la hemos obtenido antes, cuando calculábamos el conjunto imagen:

$$f_6^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{5\}, x \mapsto \frac{3x-4}{x-2}$$

(g) $f_7 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$.

Conjunto inicial=$\mathbb{R}^2$. **Conjunto origen=**$\mathbb{R}^2$, ya que el producto de dos números reales está siempre definido.

Conjunto final=$\mathbb{R}$. **Conjunto imagen=**$\mathbb{R}$, ya que cualquier número real puede expresarse como producto de dos números. En concreto, dado cualquie $x \in \mathbb{R}$, se tiene $x = x \cdot 10$, luego $x = f_7(x, 1)$.

f_7 **SI es una aplicación**, ya que conjunto inicial y el conjunto origen coinciden, y además para cada par de números reales su producto está definido de manera única.

f_7 **NO es inyectiva**, ya que hay parejas de números distintos que tienen el mismo producto. Por ejemplo $2 \cdot 2 = 1 \cdot 4 = 4$ y así $f_7(2,2) = f_7(1,4)$.

f_7 **SI es sobreyectiva**, ya que coinciden el conjunto final y el imagen.

f_7 **NO es biyectiva** porque no es inyectiva.

(h) $f_8 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x-y, x+y)$.

Conjunto inicial=$\mathbb{R}^2$. **Conjunto origen=**$\mathbb{R}^2$, ya que la resta y la suma de dos números reales está siempre definida.

Conjunto final=$\mathbb{R}$. **Conjunto imagen=**$\mathbb{R}^2$. Para comprobar esto, hay que ver si cualquier par de números reales (d,s) son diferencia y suma respectivamente de otros dos. Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x-y &= d \\ x+y &= s \end{aligned}$$

Resolviéndolo vemos que $x = \dfrac{d+s}{2}$ e $y = \dfrac{s-d}{2}$. Y por tanto siempre existen (x,y) con $f_8(x,y) = (d,s)$. Vemos además que el para (d,s) es imagen de un único elemento.

f_8 **es una aplicación**, ya que el conjunto inicial y el conjunto origen coinciden, y además para cada par de números reales la resta y la suma está definida de manera única.

f_8 **es inyectiva**. Veámoslo. Supongamos $f_8(x_1,y_1) = f_8(x_2,y_2)$; queremos que ver entonces $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$. Llamamos (d,s) a la imagen. Antes vimos que fijado (d,s) obteníamos de manera única el elemento del cual es imagen, es decir: $x_1 = \dfrac{d+s}{2} = x_2$ e $y_1 = \dfrac{s-d}{2} = y_2$. Por tanto tenemos la inyectividad.

f_8 **es sobreyectiva**, ya que coinciden el conjunto final y el imagen.

f_8 **es biyectiva** porque es inyectiva y sobreyectiva. La aplicación inversa la hemos calculado antes:

$$f_8^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2})$$

(i) $f_9 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 1/x)$.

Conjunto inicial=$\mathbb{R} \setminus \{0\}$. **Conjunto origen=**$\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ya que $(x,1/x)$ está bien definido excepto cuando $x = 0$.

Conjunto final=$\mathbb{R}^2$. **Conjunto imagen=**$\{(x,1/x)/x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Es decir la imagen es el grafo de la hipérbola $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

f_9 **es una aplicación**, ya que el conjunto inicial y el conjunto origen coinciden, y además para cada número real distinto de 0, $(x,1/x)$ está definido de manera única.

f_9 **es inyectiva**. Es bastante claro porque en la primera componente la aplicación es la identidad. Es decir, si $f_9(x_1) = f_9(x_2)$, entonces $(x_1, 1/x_1) = (x_2, 1/x_2)$ y por tanto $x_1 = x_2$.

f_9 **NO es sobreyectiva**, porque el conjunto imagen es diferente del conjunto final.

f_9 **NO es biyectiva**, porque no es sobreyectiva.

2.– *Sean A, B, C, D conjuntos, f una aplicación de A en B, g una aplicación de B en C, h una aplicación de C en D. Probar que si $g \circ f$ y $h \circ g$ son biyectivas, entonces de hecho f, g y h son biyectivas.*

Tenemos las aplicaciones:

$$\begin{aligned} f &: A \longrightarrow B \\ g &: B \longrightarrow C \\ h &: C \longrightarrow D \end{aligned}$$

Y consideramos las composiciones:

$$\begin{aligned} g \circ f &: A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ h \circ g &: B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D \end{aligned}$$

Supongamos que son biyectivas, es decir, inyectivas y sobreyectivas.

Por las propiedades de la composición con respecto a la sobreyectivdad e inyectividad, sabemos que:

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ inyectiva} &\Rightarrow f \text{ inyectiva} \\ h \circ g \text{ inyectiva} &\Rightarrow g \text{ inyectiva} \end{aligned}$$

y también:

$$\begin{aligned} g \circ f \text{ sobreyectiva} &\Rightarrow g \text{ sobreyectiva} \\ h \circ g \text{ sobreyectiva} &\Rightarrow h \text{ sobreyectiva} \end{aligned}$$

Vemos que g es inyectiva y sobreyectiva, y por tanto es biyectiva.

Ahora recordemos que si g es biyectiva, g^{-1} es biyectiva y además:

$$\begin{aligned} g^{-1} \circ g &= id_B \\ g \circ g^{-1} &= id_C \end{aligned}$$

Como la composición de aplicaciones biyectivas es biyectiva, obtenemos la biyectividad de f y de h:

$$g^{-1} \circ (g \circ f) = (g^{-1} \circ g) \circ f = id_B \circ f = f$$

$$(h \circ g) \circ g^{-1} = h \circ (g \circ g^{-1}) = h \circ id_C = h$$

3.– *Sea $f : A \to B$ una aplicación. Demostrar que*

(a) f es inyectiva si y sólo si existe una aplicación $g : B \to A$ tal que $g \circ f = i_A$.

(b) f es sobreyectiva si y sólo si existe una aplicación $h : B \to A$ tal que $f \circ h = i_B$.

(a) **Veamos que: f inyectiva** $\quad \Rightarrow \quad \exists g : B \to A / g \circ f = i_A$

Se trata de definir una aplicación g de B en A que, sobre elementos de la forma $f(x)$ nos permita recuperar x. Sobre elementos que no sean de la forma $f(x)$ nos da igual como funcione. Podemos por ejemplo "enviarlos" sobre un elemento fijo a_0 cualquiera de A. Definimos por tanto:

$$g(y) = \begin{cases} x, & \text{si } y = f(x) \text{ para algún } x \in A; \\ a_0, & \text{si } y \neq f(x) \text{ para todo } x \in A. \end{cases}$$

Primero hay que ver que es efectivamente una aplicación, es decir, que está definida de manera unívoca. Podría ocurrir que $y = f(x_1)$ pero también $y = f(x_2)$ con $x_1, x_2 \in A$. Pero **por ser inyectiva** si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$, luego está bien definida.

Es claro además por construcción que:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x$$

y así $g \circ f = id_A$.

Veamos el recíproco: $\exists g : B \to A / g \circ f = i_A \quad \Rightarrow \quad f$ **inyectiva**

Simplemente tenemos en cuenta que i_A es biyectiva y en particular inyectiva. Por tanto si $g \circ f = i_A$, entonces f es inyectiva.

(b) **Veamos que: f sobreyectiva** $\quad \Rightarrow \quad \exists h : B \to A / f \circ h = i_B$

Ahora por ser f sobreyectiva, dado $y \in B$ siempre podemos **elegir un** elemento x que verifica $f(x) = y$. Llamamos a este elemento $h(y)$ y tenemos definida una aplicación $h : B \longrightarrow A$. Es importante darse cuenta de que si f no es inyectiva no hay un único elemento que cumpla $f(x) = y$; ELIGIENDO UNO para cada $y \in B$, h está definida de manera unívoca.

Por la propia construcción de h se cumple que, dado $y \in B$:

$$(f \circ h)(y) = f(h(y)) = y$$

y así $f \circ h = id_B$.

Veamos el recíproco: $\exists h : B \to A / f \circ h = i_B \quad \Rightarrow \quad f$ **sobreyectiva**

Simplemente tenemos en cuenta que i_B es biyectiva y en particular sobreyectiva. Por tanto si $f \circ h = i_A$, entonces f es sobreyectiva.

4.– *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = +\sqrt{x}$. ¿Es una aplicación inversa de la otra? Razonar la respuesta.*

Para que f y g sean una inversa de la otra, ha de cumplirse:

$$f \circ g = id_{\mathbb{R}^+}; \qquad g \circ f = id_{\mathbb{R}};$$

Primero sea $x \in \mathbb{R}^+$. Tenemos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(+\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$$

luego se cumple $g \circ f = id_{\mathbb{R}^+}$.
Sea ahora $x \in \mathbb{R}$. Se tiene:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = +\sqrt{x^2} = |x|$$

Por tanto si x es negativo no se cumple que $(g \circ f)(x) = x$ y vemos que las aplicaciones no son inversas la una de la otra.

En realidad ya sabíamos que esto tenía que ser así: f no es inyectiva y g no es sobreyectiva, luego nunca pueden tener inversa.

Intuitivamente la raíz cuadrada es la inversa de la función elevar al cuadrado, pero para que las cosas funcionen bien, hemos de restringirnos únicamente a los números no negativos.

5.– *Sea $h : X \longrightarrow X$ una aplicación tal que existe un $n \in \mathbb{N}$ con $h^n = id_X$. Demostrar que h es biyectiva. (Notas: $h^n = h \circ \overset{n}{\ldots} \circ h$; $\quad id_X$ es la aplicación identidad de X).*

Como la identidad es una aplicación biyectiva y $h^n = id_X$, entonces h^n es biyectiva y sobreyectiva.

Además h^n se puede escribir como $h \circ h^{n-1}$, luego por las propiedades de la inyectividad con respecto a la composición deducimos que h es inyectiva.

h^n también se puede escribir como $h^{n-1} \circ h$, luego por las propiedades de la sobreyectividad con respecto a la composición deducimos que h es sobreyectiva.

Por tanto h es biyectiva.

En realidad como

$$id_X = h^n = h \circ h^{n-1} = h^{n-1} \circ h$$

deducimos que la h^{n-1} es la función inversa de h y por tanto ésta es biyectiva.

6.– *Sea $f : X \to Y$ una aplicación, y sean A, B dos subconjuntos de X. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son ciertas en general y para las que resulten no serlo, si son verdaderas bajo la hipótesis suplementaria de que f sea inyectiva o sobreyectiva.*

(a) $\boxed{f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)}$

$$y \in f(A \cup B) \Rightarrow y = f(x), x \in A \cup B \Rightarrow y = f(x), x \in A \text{ ó } x \in B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y \in f(A) \text{ ó } y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$$

Por tanto ES CIERTO SIEMPRE.

(b) $\boxed{f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)}$

$$y \in f(A) \cup f(B) \Rightarrow y \in f(A) \text{ ó } y \in f(B) \Rightarrow y = f(x), x \in A \text{ ó } y = f(x'), x' \in B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = f(x), x \in A \cup B \Rightarrow y \in f(A \cup B)$$

Por tanto ES CIERTO SIEMPRE. Como consecuencia de (a) y (b):

$$\boxed{f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)}$$

(c) $\boxed{f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)}$

$$y \in f(A \cap B) \Rightarrow y = f(x), x \in A \cap B \Rightarrow y = f(x), x \in A \text{ y } x \in B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = f(x), x \in A \text{ e } y = f(x), x \in B \Rightarrow y \in f(A) \text{ e } y \in f(B) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$$

Vemos que es CIERTO SIEMPRE.

(d) $\boxed{f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)}$ (¡OJO!)

$$y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow y \in f(A) \text{ e } y \in f(B) \Rightarrow y = f(x), x \in A \text{ e } y = f(x'), x' \in B$$

Cuidado! Ahora no podemos deducir que $y = f(x)$ con $x \in A \cap B$. Porque x pudiera ser distinto que x', y por tanto pudiera ocurrir que $x \in A$, pero $x \notin B$.

Sin embargo si suponemos f INYECTIVA, sabemos que dos elementos que tienen la misma imagen son el mismo, luego $x = x'$, y entonces la propiedad si que es cierta.

Un ejemplo donde f NO es inyectiva y no se cumple la propiedad es:

$$\begin{aligned}
&X = \text{números naturales} \\
&Y = \mathbb{R} \\
&f : X \to Y, f(n) = 0, \text{ para cualquier } n \text{ en } X \\
&A = \text{números pares} \\
&B = \text{números impares}
\end{aligned}$$

En este caso:

$$\begin{aligned}
&f(A) = \{0\} \\
&f(B) = \{0\} \\
&f(A) \cap f(B) = \{0\} \\
&A \cap B = \emptyset \\
&f(A \cap B) = \emptyset
\end{aligned}$$

luego vemos aquí que $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.

(e) $\boxed{f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)}$ (¡OJO!)

$$y \in f(X \setminus A) \Rightarrow y = f(x), x \in X, x \notin A$$

Vemos que y es imagen de un elemento x que no está en A. Pero ?podemos asegurar entonces que y no está en $f(A)$?. En general NO podemos asegurarlo. De nuevo si f no es inyectiva, pudiera haber otro elemento $x' \in A$, $x \neq x$, tal que $f(x') = f(x) = y$.

Así la propiedad es cierta si f es INYECTIVA.

En el ejemplo del apartado anterior.

$$\begin{aligned} & f(X \setminus A) = \{0\} \\ & f(A) = \{0\} \\ & Y \setminus f(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

y por tanto $f(X \setminus A) \not\subset Y \setminus f(A)$.

(f) $\boxed{Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)}$ (¡OJO!)

$$y \in Y \setminus f(A) \Rightarrow y \in Y, y \notin f(A) \Rightarrow y \neq f(x) \text{ para todo } x \in A \Rightarrow$$

Sabemos que y no es imagen de ningún elemento de A. Sin embargo, si f NO es SOBREYECTIVA pudiera ocurrir que y no fuese imagen de ningún elemento de X y por tanto $y \notin f(X \setminus A)$.

Así la propiedad NO es cierta en general. Si es cierta si f es sobreyectiva.

En el ejemplo anterior tampoco se cumple $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$.

7.– *Sean X e Y conjuntos y $f : X \to Y$ una aplciación. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f es inyectiva.

(b) Para cualesquiera subconjuntos A, B de X tales que $A \cap B = \emptyset$, se cumple $f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

- Supongamos primero que f es inyectiva. Veamos que se cumple la condición (b). Sean A, B subconjuntos de X tales que $A \cap B = \emptyset$. Si la condición no fuese cierta, entonces $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$, es decir, existiría $y \in f(A) \cap f(B)$. Por tanto $y = f(a) = f(b)$ para algún $a \in A$ y $b \in B$. Pero por ser inyectiva si $f(a) = f(B)$ entonces $a = b$ y $A \cap B \neq \emptyset$, con lo cual llegaríamos a una contradicción.

- Supongamos ahora que cumple la condición (b). Veamos que f es inyectiva. Sean $a, b \in B$; queremos ver que si $a \neq b$ entonces $f(a) \neq f(b)$. Pero si $a \neq b$ entonces tomamos los subconjuntos de X, $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$ y se verifica que $A \cap B = \emptyset$. Entonces por la condición (b), $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ lo que significa que a y b tienen distinta imagen por f.

(Primer parcial, febrero 2003)

8.– *Dadas las siguientes relaciones, decidir si son reflexivas, simétricas, antisimétricas y/o transitivas; como consecuencia, si son de orden o de equivalencia. De las que resulten ser de orden, indicar las que son de orden total, y para las de equivalencia, determinar su conjunto cociente:*

(a) en $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x-y| \leq 1$

La idea es que en la recta real $\mathbb{R}$ relacionamos puntos que estan a menor o igual distancia que la unidad.

Propiedad reflexiva: ¿$x\mathcal{R}x, \forall x \in \mathbb{R}$?. Se tiene que $|x-x| = 0 < 1$, luego SE CUMPLE.

Propiedad simétrica: ¿$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$**?** . Como $|x-y| = |y-x|$, SE CUMPLE la propiedad.

Propiedad antisimétrica: ¿$x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$?. Cuando se cumple la simétrica, la propiedad antisimétrica sólo es cierta si a lo sumo relaciona cada elemento consigo mismo. No es este el caso, ya que, por ejemplo, $0\mathcal{R}\frac{1}{2}$. NO SE CUMPLE.

Propiedad transitiva:¿$x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$?. NO SE CUMPLE. Ejemplo: $0\mathcal{R}1$, $1\mathcal{R}2$, pero 0 no está relacionado con 2.

Por tanto NO es una RELACION DE EQUIVALENCIA (por no cumplir la propiedad transitiva) y NO es una RELACION DE ORDEN (por no cumplir la propiedad antisimétrica o la propiedad transitiva).

(b) en Z, $m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m-n$ es múltiplo de 3

Propiedad reflexiva: ¿$n\mathcal{R}n, \forall n \in$ Z?. Se tiene que $|n-n| = 0$, que es múltiplo de 3, luego SE CUMPLE.

Propiedad simétrica: ¿$m\mathcal{R}n \Rightarrow n\mathcal{R}m$**?** . Si $m\mathcal{R}n$ entonces $m-n$ es múltiplo de 3 y por tanto su opuesto $n-m$ es también múltiplo de 3. SE CUMPLE la propiedad.

Propiedad antisimétrica: ¿$m\mathcal{R}n, n\mathcal{R}m \Rightarrow n = m$?. NO SE CUMPLE. Por ejemplo $3\mathcal{R}0$ y $0\mathcal{R}3$, pero $0 \neq 3$.

Propiedad transitiva:¿$m\mathcal{R}n, n\mathcal{R}k \Rightarrow m\mathcal{R}k$?. Tenemos:

$$m-k = (m-n) + (n-k)$$

Si $m\mathcal{R}n, n\mathcal{R}k$ entonces $m-n$ y $n-k$ son múltiplos de 3. Pero la diferencia de múltiplos de 3 sigue siendo múltiplo de 3, luego $m\mathcal{R}k$. Vemos que SE CUMPLE la propiedad.

Es una RELACION DE EQUIVALENCIA porque cumple las propiedades reflexiva, simétrica y tansitiva. Veamos cual es el conjunto cociente. Se trata de dar un representante de cada clase. Dado $m \in$ Z, dividiendo por 3 sabemos que puede expresarse como:

$$m = 3c + r, \text{ con } c, r \in \mathrm{Z}$$

donde c es el cociente y r es el resto de la división. Sabemos que r está comprendido entre entre 0 y 2. Como $m - r = 3c$, entonces $m\mathcal{R}r$. Deducimos que la clase de cualquier elemento m tiene un representante comprendido entre 0 y 2. El conjunto cociente es:

$$Z/\mathcal{R} = \{c(0), c(1), c(2)\}$$

Por último, NO es una RELACION DE ORDEN, porque no cumple la propiedad antisimétrica.

(c) en $\mathbb{R}^2$, $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a \leq c$ y $b \leq d$

Propiedad reflexiva: ¿$(a,b)\mathcal{R}(a,b), \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$?. Se tiene que $a \leq a$ y $b \leq b$, luego SE CUMPLE.

Propiedad simétrica: ¿$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Rightarrow (c,d)\mathcal{R}(a,b)$? . NO SE CUMPLE. Por ejemplo, $(0,0)\mathcal{R}(1,1)$ pero sin embargo no es cierto que $(1,1)\mathcal{R}(0,0)$.

Propiedad antisimétrica: ¿$(a,b)\mathcal{R}(c,d), (c,d)\mathcal{R}(a,b) \Rightarrow (a,b) = (c,d)$?. Tenemos:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Rightarrow a \leq c \text{ y } b \leq d$$
$$(c,d)\mathcal{R}(a,b) \Rightarrow c \leq a \text{ y } d \leq b$$

Pero si $a \leq c$ y $c \leq a$, entonces $a = c$ y si $b \leq d$ y $d \leq b$, entonces $b = d$. Por tanto la propiedad antisimétrica SE CUMPLE.

Propiedad transitiva:¿$(a,b)\mathcal{R}(c,d), (c,d)\mathcal{R}(e,f) \Rightarrow (a,b)\mathcal{R}(e,f)$?. Tenemos:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Rightarrow a \leq c \text{ y } b \leq d$$
$$(c,d)\mathcal{R}(e,f) \Rightarrow c \leq e \text{ y } d \leq f$$

Pero si $a \leq c$ y $c \leq e$, entonces $a \leq e$ y si $b \leq d$ y $d \leq f$, entonces $b \leq f$. Luego $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$ y vemos que SE CUMPLE la propiedad.

NO es una RELACION DE EQUIVALENCIA, porque no cumple la propiedad simétrica.

ES una RELACION DE ORDEN, porque cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Sin embargo NO es de ORDEN TOTAL, porque hay elementos que no están relacionados entre sí. Por ejemplo ni $(0,1)\mathcal{R}(1,0)$ ni $(1,0)\mathcal{R}(0,1)$.

(d) en $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \neq y$

Propiedad reflexiva: ¿$x\mathcal{R}x, \forall x \in \mathbb{R}$?. Obviamente NO SE CUMPLE.

Propiedad simétrica: ¿$x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$? . Obviamente SE CUMPLE. (Si x es distinto de y, y es distino de x).

Propiedad antisimétrica: ¿$x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}x \Rightarrow x = y$?. NO SE CUMPLE. Porque, de hecho, si $x\mathcal{R}y$, $x \neq y$.

Propiedad transitiva:¿$x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$?. NO SE CUMPLE. Por ejemplo, $1\mathcal{R}2$, $2\mathcal{R}1$, pero no es cierto que $1\mathcal{R}1$.

NO es una RELACION DE EQUIVALENCIA, porque no cumple la propiedad reflexiva (ni la transitiva). NO es una RELACION DE ORDEN, porque no cumple ninguna de las propiedades requeridas.

(e) en $\mathbb{R}^2$, $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow [a<c]$ ó $[a=c$ y $b \leq d]$.

Propiedad reflexiva: ¿$(a,b)\mathcal{R}(a,b), \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$**?**. Se tiene que $a=a$ y $b \leq b$, luego $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$ y la propiedad SE CUMPLE.

Propiedad simétrica: ¿$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Rightarrow (c,d)\mathcal{R}(a,b)$**?** . NO SE CUMPLE. Por ejemplo, $(0,0)\mathcal{R}(1,1)$ pero sin embargo no es cierto que $(1,1)\mathcal{R}(0,0)$.

Propiedad antisimétrica: ¿$(a,b)\mathcal{R}(c,d), (c,d)\mathcal{R}(a,b) \Rightarrow (a,b)=(c,d)$**?**. Tenemos:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Rightarrow [a<c] \text{ ó } [a=c \text{ y } b \leq d]$$
$$(c,d)\mathcal{R}(a,b) \Rightarrow [c<a] \text{ ó } [a=c \text{ y } d \leq b]$$

Por tanto la única posibilidad para la primera componente es $a=c$. Pero en ese caso, $b \leq d$ y $d \leq b$, y necesariamente $b=d$. La propiedad SE CUMPLE.

Propiedad transitiva:¿$(a,b)\mathcal{R}(c,d), (c,d)\mathcal{R}(e,f) \Rightarrow (a,b)\mathcal{R}(e,f)$**?**. Tenemos:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Rightarrow [a<c] \text{ ó } [a=c \text{ y } b \leq d]$$
$$(c,d)\mathcal{R}(e,f) \Rightarrow [c<e] \text{ ó } [c=e \text{ y } e \leq f]$$

Si $a<c$ y $c<e$, ó $a=c$ y $c<e$, ó $a<c$ y $c=e$, entonces $a<e$ y por tanto $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$. La posibilidad restante es que $a=c$ y $c=e$; pero entonces, $a=e$ y $b \leq d$ y $d \leq e$, luego, $b \leq e$ y de nuevo, $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$. La propiedad SE CUMPLE.

NO es una RELACION DE EQUIVALENCIA, porque no cumple la propiedad simétrica.

ES una RELACION DE ORDEN, porque cumple las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Veamos que además es de orden total. Sean $(a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2$ cualesquiera:

- Si $a<c$ entonces $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$.

- Si $a=c$ entonces, o bien $b \leq d$ y $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$, o bien $d \leq b$ y $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.

- Si $c<a$ entonces $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$.

Vemos que cualquier par de elementos están relacionados y por tanto es de ORDEN TOTAL.

(Nota: Esta relación se llama el **orden léxicográfico**, ya que es el que empleamos para ordenar alfabéticamente las palabras en un diccionario: primero comparamos la primera letra, si coinciden pasamos a la siguiente y así sucesivamente).

(f) en $\mathrm{Z} \times \mathbb{N}$, $(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow ad=bc$.

Propiedad reflexiva: ¿$(a,b)\mathcal{R}(a,b), \forall (a,b) \in \mathrm{Z} \times \mathbb{N}$**?**. Se tiene que $ab=ba$, luego $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$ y la propiedad SE CUMPLE.

Propiedad simétrica: ¿$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Rightarrow (c,d)\mathcal{R}(a,b)$**?** . SE CUMPLE, porque $ad=bc$ es lo mismo que $cb=da$.

Propiedad antisimétrica: ¿$(a,b)\mathcal{R}(c,d), (c,d)\mathcal{R}(a,b) \Rightarrow (a,b)=(c,d)$**?**. NO SE CUMPLE. Por ejemplo, $(2,1)\mathcal{R}(4,2)$ y $(4,2)\mathcal{R}(2,1)$, pero obviamente $(4,2) \neq (2,1)$.

Propiedad transitiva:¿$(a,b)\mathcal{R}(c,d),(c,d)\mathcal{R}(e,f) \Rightarrow (a,b)\mathcal{R}(e,f)$**?**. Tenemos:

$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow a = \frac{bc}{d} \text{ (tiene sentido porque } d \in \mathbb{N} \Rightarrow d \neq 0)$$
$$(c,d)\mathcal{R}(e,f) \Rightarrow cf = de$$

Entonces
$$af = \frac{bc}{d}f = \frac{b(cf)}{d} = \frac{b(de)}{d} = be$$

y por tanto $(a,b)\mathcal{R}(e,f)$. SE CUMPLE la propiedad.

ES una RELACION de EQUIVALENCIA porque cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva. Veamos cual es el conjunto cociente. Dado $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, si a y b tienen algún divisor comun $k > 1$, se verifica $a = ka'$ y $b = kb'$. Luego $ab' = ka'b' = a'b$ y por tanto $(a,b)\mathcal{R}(a',b')$, es decir, siempre podemos encontrar un elemento (a',b') relacionado con (a,b) donde a' y b' no tengan divisores comunes. El conjunto cociente es:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}/\mathcal{R} = \{c(a,b)/a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, m.c.d(a,b) = 1\}$$

donde $m.c.d(a,b)$ es el máximo común divisor de a y b.

En realidad podemos fijarnos que la relación también puede definirse de manera equivalente como:
$$(a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

es decir, relacionamos pares que representen la misma fracción. Por tanto el conjunto cociente puede interpretarse precisamente como el conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales.

Finalmente, NO es una RELACION DE ORDEN, porque no cumple la propiedad antisimétrica.

9.– *Sea $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ la familia de todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$. Definimos la siguiente relación. Dados $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$:*

$$A\mathcal{R}B \iff \text{ existe una aplicación biyectiva } f : A \longrightarrow B$$

Probar que es una relación de equivalencia.

Tenemos que comprobar que cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva:

- REFLEXIVA: Hay que probar que para cualquier subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ existe una aplicación biyectiva $f : A \longrightarrow A$. Pero basta considerar la aplicación identidad en A que sabemos que es biyectiva.

- SIMETRICA: Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Supongamos que $A\mathcal{R}B$. Entonces existe una aplicación biyectiva $f : A \longrightarrow B$. Por ser biyectiva tiene inversa y esta es también biyectiva, $f^{-1} : B \longrightarrow A$. Deducimos que $B\mathcal{R}A$ y por tanto se cumple la propiedad simétrica.

- TRANSITIVA. Sean $A, B, C \subset \mathbb{R}$. Supongamos que $A\mathcal{R}B$ y $B\mathcal{R}C$, queremos ver que entonces $A\mathcal{R}C$. Pero:

$$A\mathcal{R}B \Rightarrow \exists f : A \longrightarrow B \text{ biyectiva}$$
$$B\mathcal{R}C \Rightarrow \exists g : B \longrightarrow C \text{ biyectiva}$$

Pero entonces la aplicación:

$$g \circ f : A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

es biyectiva por ser composición de biyectivas y por tanto $A\mathcal{R}C$.

(Examen final, junio 2004)

11.– *Encontrar la (única) respuesta correcta, de entre las indicadas, a las siguientes cuestiones:*

(a) *En* $\mathbb{R}$ *definimos la relación:* $xRy \iff |x| \geq |y|$. *Dicha relación:*

◯ *cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.*

FALSO. No cumple la simétrica. Por ejemplo $2R1$, pero no es cierto que $1R2$.

◯ *cumple las propiedades reflexiva y antisimétrica.*

FALSO. No cumple la antisimétrica. Por ejemplo $1R(-1)$, $(-1)R(1)$ pero $-1 \neq 1$.

◯ *cumple las propiedades reflexiva y transitiva.*

VERDADERO.

Reflexiva: xRx, porque $|x| \geq |x|$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Transitiva: Si xRy e yRz, entonces $|x| \geq |y|$ e $|y| \geq |z|$. Por tanto $|x| \geq |z|$ y xRz.

◯ *es una relación de orden.*

FALSO. No cumple la propiedad antisimétrica.

(Primer parcial, enero 2004)

(b) *En el conjunto de números naturales, la relación dada por:* $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow b$ *es múltiplo de* a.

- Todo numero natural es múltiplo de si mismo y por tanto se cumple la propiedad reflexiva.

- 2 es múltiplo de 1 pero 1 no es múltiplo de 2 por tanto no se cumple la simétrica.

- Si b es múltiplo de a y a es múltipo de b, entonces $b = ka$ y $a = k'b$, con k y k' números enteros positivos. Por tanto $b = kk'b$ y $kk' = 1$. Por ser números enteros positivos necesariamente $k = k' = 1$ y $a = b$. Vemos que se cumple la antisimétrica.

- Si b es múltiplo de a y c es múltiplo de b existen número enteros positivos k, k' tales que $b = ak$ y $c = bk'$. Entonces $c = akk'$ y vemos que c es múltiplo de a. Se cumple la propiedad transitiva.

◯ *No es reflexiva.*

FALSO.

◯ *Es de orden.*

VERDADERO. Ya que se cumplen las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva.

◯ *Es de equivalencia.*

FALSO. Ya que no se cumple la propiedad simétrica.

◯ *No es transitiva.*

FALSO.

(Primer parcial, enero 2005)

(c) *Si A, B, C son tres conjuntos, entonces:*

◯ $(A \subset C$ ó $B \subset C) \Longrightarrow A \cap B \subset C$.

VERDADERO. Se tiene:

$$A \cap B \subset A \text{ y } A \cap B \subset B.$$

Por tanto:

$$(A \subset C \text{ ó } B \subset C) \Rightarrow (A \cap B \subset A \subset C \text{ ó } A \cap B \subset B \subset C) \Rightarrow A \cap B \subset C.$$

◯ $(A \subset C$ ó $B \subset C) \Longrightarrow A \cup B \subset C$.

FALSO. Por ejemplo si $A = C = \{0\}$, $B = \{1\}$; entonces $A \subset C$, pero $A \cup B = \{0, 1\} \not\subset C = \{0\}$.

◯ $A \cap B \subset C \Longrightarrow (A \subset C$ ó $B \subset C)$.

FALSO. Por ejemplo, si $A = \{0\}$, $B = \{1\}$ y $C = \{2\}$, entonces $A \cap B = \emptyset \subset C$, pero ni $A \subset C$, ni $B \subset C$.

◯ $A \cap B \subset C \Longrightarrow (A \subset C$ y $B \subset C)$.

FALSO. Como ejemplo pude tomarse el mismo del caso anterior.

(Primer parcial, enero 2006)

(d) *En $\mathbb{R}$ definimos definimos la siguiente relación. Dados $x, y \in \mathbb{R}$:*

$$x\mathcal{R}y \iff sin(x - y) = 0.$$

Veamos las distintas propiedades:

- REFLEXIVA. SE CUMPLE, ya que para cualquier $x \in \mathbb{R}$:

$$sin(x - x) = sin(0) = 0 \Rightarrow x\mathcal{R}x.$$

- SIMÉTRICA. SE CUMPLE, ya que dados $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow sin(x - y) = 0 \Rightarrow sin(y - x) = -sin(x - y) = 0 \Rightarrow y\mathcal{R}0.$$

- ANTISIMÉTRICA. NO SE CUMPLE. Por ejemplo si $x = 0$, $y = \pi$, se tiene:

$$\begin{array}{l} sin(x - y) = sin(-\pi) = 0 \Rightarrow x\mathcal{R}y \\ sin(y - x) = sin(\ \ \pi) = 0 \Rightarrow y\mathcal{R}x \end{array} \quad \text{pero } x \neq y.$$

- TRANSITIVA. SE CUMPLE. Dados $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$x\mathcal{R}y \Rightarrow sin(x-y) = 0 \Rightarrow x - y = m\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
$$y\mathcal{R}z \Rightarrow sin(y-z) = 0 \Rightarrow y - z = n\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto:

$$x - z = (x-y) + (y-z) = (m+n)\pi \Rightarrow sin(x-z) = sin((m+n)\pi) = 0 \Rightarrow x\mathcal{R}z.$$

Otra forma de comprobar los mismo puede ser:

$$\begin{aligned} sin(x-z) = sin((x-y)+(y-z)) = sin(x-y)cos(y-z) + sin(y-z)cos(x-y) = \\ = 0 \cdot cos(y-z) + 0 \cdot cos(x-y) = 0 \Rightarrow x\mathcal{R}z. \end{aligned}$$

○ *Es una relación de orden.*

FALSO. No cumple la propiedad antisimétrica.

○ *Cumple las propiedades reflexiva y transitiva, pero no la simétrica.*

FALSO.

○ *Cumple las propiedades reflexiva y simétrica, pero no la transitiva.*

FALSO.

○ *Es una relación de equivalencia.*

VERDADERO. Cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

(Primer parcial, enero 2006)

(e) *En el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales, se define la relación: $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y$.*

○ *Cumple la propiedad antisimétrica.*

FALSO. Contraejemplo:

$4\mathcal{R} - 5$ porque $4^2 + 4 = 20 = (-5)^2 - 5$.

$-5\mathcal{R}4$ porque $(-5)^2 - 5 = 20 = (4)^2 + 4$.

Pero sin embargo $4 \neq -5$.

○ *No existe ninguna clase de equivalencia que contenga un único elemento.*

FALSO. Una clase contine un único elemento si hay un único valor $y = x$ para el cual $x^2 + x = y^2 + y$. Ahora dado x si llamamos $h = x^2 + x$, para que haya un único elemento en su clase la ecuación de segundo grado:

$$y^2 + y - h = 0,$$

tiene que tener una única solución. Eso equivale a que su discriminante es 0, es decir:

$$1 - 4 \cdot 1 \cdot (-h) = 0 \iff h = 1/4.$$

En ese caso:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{0}}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Por tanto la clase de equivalencia del $-1/2$ contiene un único elemento.

◯ *La clase de equivalencia del 4 es* $C(4) = \{4, -4\}$.

La clase de equivalencia del 4 está formada por todos los elementos y tales que:

$$4^2 + 4 = y^2 + y.$$

Nos queda la ecuación de segundo grado:

$$y^2 + y - 20 = 0.$$

Resolviendo:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{2} = \begin{cases} -5 \\ 4 \end{cases}$$

Por tanto:

$$C(4) = \{4, -5\}.$$

◯ *La clase de equivalencia del 4 es* $C(4) = \{4, -5\}$.

VERDADERO.

(Primer parcial, enero 2008)