

# UNA FORMULACIÓN NUMÉRICA BASADA EN TÉCNICAS DE MÍNIMOS CUADRADOS MÓVILES: APLICACIÓN A PROBLEMAS DE AEROACÚSTICA

Xesús Nogueira<sup>1</sup>, Ignasi Colominas<sup>1</sup>, Luis Cueto-Felgueroso<sup>2</sup>,  
Fermín Navarrina<sup>1\*</sup> y Manuel Casteleiro<sup>1</sup>

GMNI—Grupo de Métodos Numéricos en Ingeniería  
Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación  
E.T.S. de Ingenieros de Caminos Canales y Puertos  
Universidade da Coruña  
e-mail: xnogueira, icolominas, fnavarrina, casteleiro@udc.es  
web: <http://www.caminos.udc.es/gmni>

2: Department of Civil and Environmental Engineering  
Massachusetts Institute of Technology  
77 Massachusetts Ave., Cambridge, MA 02139, USA  
e-mail: [lcueto@mit.edu](mailto:lcueto@mit.edu),

**Palabras clave:** Aeroacústica Computacional, Mallas no estructuradas, Métodos numéricos de alto orden, Turbulencia

**Resumen.** *La resolución de problemas de aeroacústica en mallas no estructuradas es uno de los aspectos de la aeroacústica computacional (CAA) que requieren un mayor desarrollo. En este trabajo se presenta la aplicación de un método de volúmenes finitos de alto orden basado en mínimos cuadrados móviles (MLS) a la resolución de problemas de aeroacústica en mallas no estructuradas. El método se utiliza para resolver las ecuaciones de Euler linealizadas, en casos habitualmente resueltos en la bibliografía en mallas estructuradas, mediante métodos de diferencias finitas de alta resolución espectral.*

## 1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la aplicación de técnicas numéricas a la resolución de problemas de aerodinámica ha obtenido muy buenos resultados y hoy en día la Mecánica de Fluidos Computacional (CFD) es una herramienta fundamental en el diseño de aeronaves.

Sin embargo, la aplicación de métodos numéricos exitosos en CFD a la resolución de problemas de aeroacústica presenta dificultades. La primera dificultad con la que se hay que enfrentar es la baja amplitud de las ondas acústicas. Si la viscosidad numérica introducida por el método es excesiva, disipará las ondas acústicas, haciendo inservible la simulación. Otro problema importante son las condiciones de contorno. Las condiciones de contorno

más empleadas en problemas de aerodinámica están basadas en las características y se diseñan a partir de los invariantes de Riemann [1]. Estas condiciones de contorno producen reflexiones de una magnitud mayor o igual a la amplitud de las ondas acústicas. En las ecuaciones de Euler no hay un término viscoso que pueda amortiguar estas reflexiones lo que junto con la utilización de un método de alto orden, poco disipativo, provoca que este ruido numérico se propague por todo el dominio distorsionando o destruyendo completamente la solución. Estas condiciones de contorno no son, por tanto, útiles para su aplicación a aeroacústica.

Una de las diferentes estrategias para resolver un problema de propagación del sonido, son los métodos híbridos. En este tipo de métodos el problema acústico se desacopla del problema aerodinámico. La información aerodinámica se introduce por medio de la definición de fuentes que se introducen en la formulación del problema acústico [2, 3]. En este trabajo las ecuaciones que definen el problema acústico son las ecuaciones de Euler linealizadas.

En este tipo de problemas un esquema consistente, estable y convergente de alto orden no garantiza una solución de buena calidad. Esto es debido a que en las ecuaciones de Euler linealizadas en un flujo medio uniforme pueden existir hasta tres tipos de ondas diferentes: ondas acústicas, vorticales y entrópicas, que se comportan de manera muy diferente. Las primeras son no dispersivas, no disipativas y se propagan con la velocidad del sonido. Las dos últimas son también no dispersivas y no disipativas, pero se propagan de forma muy direccional, en la misma dirección que el flujo y con su velocidad. Si el esquema numérico utilizado no tiene estas propiedades, no será capaz de representar fielmente la solución. Por otro lado el espectro de frecuencias de interés puede ser muy amplio según la diferente naturaleza de las fuentes de sonido. Como ejemplo se puede citar el ruido producido por un flujo en chorro supersónico turbulento (producido en turbinas de reacción).

En este contexto, los métodos espectrales y de diferencias finitas casi espectrales son imbatibles. Sin embargo, no son utilizables en el caso de mallas no estructuradas. El desarrollo de métodos válidos para resolver problemas de aeroacústica en este tipo de mallas es uno de los campos de la aeroacústica computacional (CAA) que necesita más desarrollo [2].

En este trabajo se presenta la aplicación de un método de alto orden de volúmenes finitos basado en aproximaciones de mínimos cuadrados móviles a la resolución de diferentes ejemplos numéricos de problemas tipo de aeroacústica. Se comprueba que el método numérico propuesto es capaz de proporcionar buenas soluciones en este tipo de mallas.

## 2. Las ecuaciones de Euler linealizadas

La mayor parte de los problemas de aeroacústica son lineales, por lo que es posible linealizar las ecuaciones de Euler alrededor de una solución estacionaria  $\mathbf{U}_0$ . Las ecuaciones de Euler bidimensionales linealizadas respecto a una solución estacionaria  $\mathbf{U}_0$  se pueden

escribir en forma conservativa del siguiente modo:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{W})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{W})}{\partial y} + \mathbf{H}(\mathbf{W}) = \mathbf{S} \quad (1)$$

siendo  $\mathbf{S}$  un término fuente y

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho' \\ u' \\ v' \\ p' \end{pmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \rho' u_0 + \rho_0 u' \\ \frac{p'}{\rho_0} + u_0 u' \\ u_0 v' \\ u_0 p' + \gamma p_0 u' \end{pmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho' v_0 + \rho_0 v' \\ v_0 u' \\ \frac{p'}{\rho_0} + v_0 v' \\ \rho_0 \\ v_0 p' + \gamma p_0 v' \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(\rho_0 u' + u_0 \rho')}{\rho_0} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{(\rho_0 v' + v_0 \rho')}{\rho_0} \frac{\partial u_0}{\partial y} \\ \frac{(\rho_0 u' + u_0 \rho')}{\rho_0} \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{(\rho_0 v' + v_0 \rho')}{\rho_0} \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ (\gamma - 1) p' \nabla \cdot \mathbf{u}_0 - (\gamma - 1) u' \nabla p_0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

en donde la velocidad de la solución estacionaria es  $\mathbf{u}_0 = (u_0, v_0)$ . El subíndice 0 hace referencia al valor de la solución estacionaria.

En el caso de un flujo medio uniforme,  $\mathbf{H}$  es nula.

En las ecuaciones de Euler Linealizadas es posible la existencia de tres tipos de ondas: ondas entrópicas asociadas a fluctuaciones de densidad, ondas vorticales asociadas a fluctuaciones de velocidad, y ondas acústicas, en las que intervienen fluctuaciones en todas las variables.

### 3. Metodología Numérica

El método numérico empleado para resolver las ecuaciones de Euler linealizadas es el método FV-MLS de tercer orden [4, 5, 6]. Se trata de un método de volúmenes finitos de alto orden basado en aproximaciones de mínimos cuadrados móviles (MLS). Así, se ha utilizado una discretización upwind de los términos de flujo. En particular, se ha empleado un método del tipo “descomposición del vector de flujo” (*flux vector splitting*). El aumento de orden del esquema de volúmenes finitos se realiza mediante una reconstrucción de las variables en el interior de las celdas. Así, el valor de cada variable en los puntos de integración en las aristas de los elementos es reconstruido por medio de una serie de Taylor. Las derivadas necesarias para esta reconstrucción se llevan a cabo por medio de una aproximación de mínimos cuadrados móviles.

En la aplicación práctica de un método de volúmenes finitos de alto orden es muy importante la precisión en la integración de los flujos en las aristas. Por lo tanto, emplearemos un número de puntos de integración superior a uno. Para la realización de este trabajo

se han utilizado dos puntos de Gauss en cada arista para la integración de los flujos, con una reconstrucción cúbica de la variable.

Consideremos una función  $u(\mathbf{x})$  definida en un dominio  $\Omega$ . La idea básica del método MLS es aproximar  $u(\mathbf{x})$  en un punto dado  $\mathbf{x}$ , mediante un ajuste de mínimos cuadrados ponderados de  $u(\mathbf{x})$  en una “vecindad”  $\mathbf{x}$ .

$$u(\mathbf{x}) \approx \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x}) \alpha_i(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \quad (4)$$

$\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$  es una base polinómica  $m$ -dimensional y  $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}}$  es un conjunto de parámetros a determinar, tales que minimizan el siguiente funcional de error:

$$J(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}}) = \int_{\mathbf{y} \in \Omega_{\mathbf{x}}} W(\mathbf{z} - \mathbf{y}, h) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \left[ u(\mathbf{y}) - \mathbf{p}^T(\mathbf{y}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \right]^2 d\Omega_{\mathbf{x}} \quad (5)$$

Donde  $W(\mathbf{z} - \mathbf{y}, h) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}}$  es un *kernel* con soporte compacto (denotado por  $\Omega_{\mathbf{x}}$ ) centrado en  $\mathbf{z} = \mathbf{x}$ . El parámetro  $h$  es la longitud de suavizado (smoothing length), que es una medida del tamaño del soporte  $\Omega_{\mathbf{x}}$ .

La minimización de  $J$  conduce a:

$$\int_{\mathbf{y} \in \Omega_{\mathbf{x}}} \mathbf{p}(\mathbf{y}) W(\mathbf{z} - \mathbf{y}, h) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} u(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{x}} = \mathbf{M}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \quad (6)$$

donde  $\mathbf{M}(\mathbf{x})$  es la matriz de momentos, definida como:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{y} \in \Omega_{\mathbf{x}}} \mathbf{p}(\mathbf{y}) W(\mathbf{z} - \mathbf{y}, h) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \mathbf{p}^T(\mathbf{y}) \quad (7)$$

El proceso de minimización conduce a la obtención de la siguiente estructura de la interpolación:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_{\Omega_{\mathbf{x}}} \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\Omega_{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u}_{\Omega_{\mathbf{x}}} = \sum_{j=1}^{n_{\mathbf{x}}} N_j(\mathbf{x}) u_j \quad (8)$$

Se observa que la aproximación está escrita en términos de las “funciones de forma” MLS ( $N_j(\mathbf{x})$ ):

$$\mathbf{N}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{P}_{\Omega_{\mathbf{x}}} \mathbf{W}(\mathbf{x}) \quad (9)$$

Para este trabajo, hemos utilizado la siguiente base cúbica:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = (1 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_1 x_2 \quad x_1^2 \quad x_2^2 \quad x_1^2 x_2 \quad x_1 x_2^2 \quad x_1^3 \quad x_2^3)^T \quad (10)$$

Donde  $(x_1, x_2)$  indican las coordenadas cartesianas de  $\mathbf{x}$ .

En la implementación práctica del método, las partículas se identifican con los centroides de los elementos de la malla. Además, en el caso de elementos del contorno se añaden nodos en el punto medio de la arista correspondiente al contorno. Un punto clave de este método es la definición de *plantillas* que determinan las nubes de puntos a emplear en la aproximación. Para su construcción, se ha seguido lo indicado en las referencias [4, 5, 6], en las que se pueden encontrar una explicación completa de este método y su implementación práctica.

Los gradientes y derivadas sucesivas se calculan por medio de la aproximación MLS, para reconstruir la solución en cada elemento por medio de una serie de Taylor, y poder obtener los valores de la función en los puntos de integración de los flujos en las aristas. De este modo, el gradiente de  $\hat{u}(\mathbf{x})$  se evalúa de la manera siguiente:

$$\nabla_{\mathbf{x}}\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n u_j \nabla_{\mathbf{x}} N_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n u_j \nabla_{\mathbf{x}} W_j(\mathbf{x}) V_j \quad (11)$$

En el caso de reconstrucciones sin limitar, las derivadas de las variables se calculan directamente en los centroides usando MLS. Así, los gradientes aproximados se expresan como:

$$\nabla \mathbf{U}_I = \sum_{j=1}^{n_{\mathbf{x}_I}} U_j \nabla N_j(\mathbf{x}_I) \quad (12)$$

Las derivadas de segundo orden pueden escribirse a partir de las derivadas de las funciones de forma [4].

En este trabajo, las primeras derivadas se calculan como derivadas MLS completas. Para las aproximaciones de las derivadas segundas y terceras, se han empleado derivadas difusas [4, 5, 6].

El kernel empleado es el basado en la exponencial truncada, siendo en una dimensión de la forma:

$$W(x, x', \kappa) = \frac{e^{-\left(\frac{s}{c}\right)^2} - e^{-\left(\frac{d_m}{c}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{d_m}{c}\right)^2}} \quad (13)$$

con  $s = |x - x'|$ ,  $d_m = \max(|x - x'|)$ ,  $c = \frac{d_m}{2\kappa}$  y  $x'$  es un punto de referencia alrededor del cual se centra la función kernel. Además,  $x$  es la posición de cada uno de los centroides pertenecientes al *stencil*.

El kernel en dos dimensiones se obtiene mediante el producto de dos kernels unidimensionales:

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \kappa_x, \kappa_y) = W(x, x', \kappa_x) W(y, y', \kappa_y) \quad (14)$$

El valor óptimo de  $\kappa_x$  es  $\kappa_x = 6$  [7]. Sin embargo, en nuestras pruebas este esquema ha mostrado ser demasiado poco disipativo para las ecuaciones de Euler linealizadas, y el esquema numérico no es capaz de atenuar suficientemente las ondas de alta frecuencia, por lo que los cálculos fallan. Por tanto, se han tomado valores de  $\kappa_x = \kappa_y = 1$  y  $\kappa_x = \kappa_y = 2.5$ .

#### 4. Condiciones de contorno

Como se ha comentado, en problemas de aeroacústica las condiciones de contorno son aún más críticas si cabe que en problemas de aerodinámica. Se han propuesto una gran variedad de técnicas, entre las cuales destacan por su amplia difusión las capas absorbentes. Esta técnica consiste en añadir celdas adicionales formando una zona en la que se atenuarán las ondas de alguna forma. Así, una aproximación posible para la atenuación de la onda en la capa absorbente es la aplicación conjunta de un aumento del tamaño de malla (*grid stretching*) y un filtro numérico [8]. Se trata de una atenuación puramente numérica. Una onda puede descomponerse en la suma de multitud de ondas armónicas de diferente frecuencia y amplitud. Cuando la onda entra en la capa absorbente deja de estar resuelta completamente (al aumentar el tamaño de malla), y las ondas armónicas de mayor frecuencia pasan de estar en la zona de frecuencias resueltas a la zona de altas frecuencias no resueltas por el método numérico. En esta zona, el método FV-MLS presenta las mayores propiedades de disipación (ver figura 1) (derecha) y atenúa estas ondas. A medida que el tamaño de los elementos de la malla sigue aumentando, cada vez hay más ondas armónicas que pasan a estar en la zona de altas frecuencias y que van a ser disipadas, con lo que la onda original va siendo atenuada cada vez más. Si la disipación inherente al esquema no es suficiente, es posible realizar la atenuación mediante un filtro explícito de paso bajo.

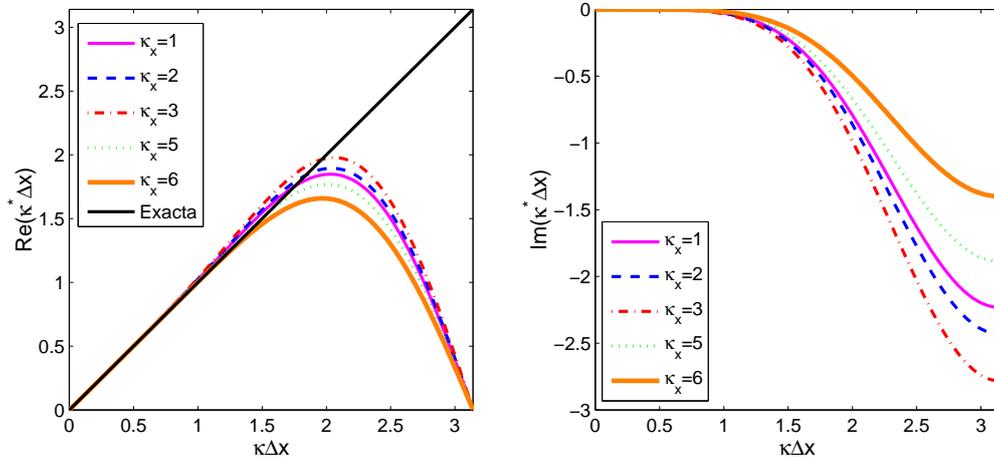


Figura 1: Dispersión (izquierda) y disipación (derecha) del método FV-MLS según diferentes valores del parámetro de forma  $\kappa_x$  del kernel exponencial.

#### 5. Ejemplos Numéricos

En esta sección se presentan varios ejemplos numéricos de problemas tipo en aeroacústica. El objetivo de estos ejemplos es poder comparar los resultados obtenidos por el método

FV-MLS sobre mallas no estructuradas con los resultados existentes en la bibliografía obtenidos en mallas estructuradas con métodos de diferencias finitas. Entre estos métodos, los más utilizados son diferencias compactas casi espectrales de alto orden [9, 10] o bien con esquemas DRP (*Dispersion-Relation-Preserving*) [11]. En la bibliografía estos ejemplos están resueltos en mallas cartesianas. Aquí se van a resolver en mallas no estructuradas, por lo que el problema de control de oscilaciones espúreas es mayor.

### 5.1. Fuente acústica periódica en un flujo uniforme

En este apartado se reproduce el ejemplo de [12], en el que se considera una fuente de sonido periódica que se irradia en el seno de una corriente uniforme en la dirección del eje de abscisas. En primer lugar, se analiza el caso en el que la corriente es subsónica, con número de Mach  $M_x = 0.5$ . La fuente está centrada en el punto  $(x_s, y_s) = (0, 0)$ , y se define como:

$$S_p = \frac{1}{2} \exp\left(-\ln(2) \frac{x^2 + y^2}{2}\right) \sin(\omega t) \times [1, 0, 0, 1]^T \quad (15)$$

Con el fin de adimensionalizar la fuente, se multiplica (15) con  $[\rho_\infty c_\infty, 0, 0, \rho_\infty c_\infty^2 / \Delta x]$ . La frecuencia angular es  $\omega = 2\pi/30$ , con lo que la longitud de onda es  $\lambda = 30$ . El dominio de cálculo es el círculo de radio 100 unidades. Como se ha explicado en el apartado anterior, se ha utilizado una capa absorbente junto con la imposición de flujos nulos para las condiciones de contorno. La malla utilizada es no estructurada (tipo *paving* [13]) y la capa absorbente se dispone desde el contorno de la circunferencia del dominio de cálculo hasta  $x = \pm 300$  e  $y = \pm 300$ . Las condiciones iniciales son fluctuaciones nulas en todo el dominio. Con esta configuración, sólo ondas acústicas van a abandonar el dominio.

En la figura 2 se muestra la estructura de la capa absorbente y un detalle del interior del dominio de cálculo. Es preciso comentar que la capa absorbente utilizada no es recomendable desde un punto de vista práctico. Se ha construido deliberadamente para mostrar la robustez de las condiciones de contorno implementadas para el caso de ondas acústicas abandonando el dominio. En un problema general es posible la existencia de ondas de vorticidad mucho más sensibles a las condiciones de contorno, por lo que se recomienda que la capa absorbente sea siempre lo más “estructurada” posible.

Debido a la imposición del flujo medio, la longitud de onda aparente se modifica y va a ser diferente aguas arriba ( $\lambda_1$ ) y aguas abajo ( $\lambda_2$ ) de la fuente:

$$\lambda_1 = (1 - M_x) \lambda \quad (16)$$

$$\lambda_2 = (1 + M_x) \lambda \quad (17)$$

El problema se resuelve empleando el método FV-MLS de tercer orden, con el kernel exponencial y un método Runge-Kutta de cuarto orden, con  $dt = 0.5$ .

En la figura 3 se muestran las isoclinas de presión para diferentes instantes de tiempo. Se aprecia la diferente longitud de onda aguas arriba y aguas abajo de la fuente. En la

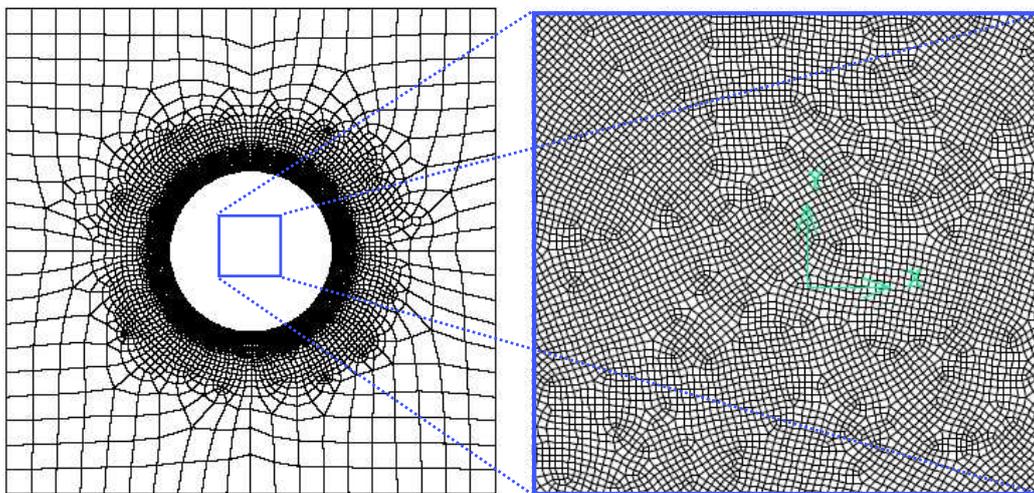


Figura 2: Capa absorbente para el problema de la fuente acústica periódica y detalle del dominio de cálculo

figura 4 se puede ver el perfil de la presión a lo largo del eje de abscisas para un tiempo  $t = 270$ . La solución analítica dada en [12] también se representa en la figura. La solución obtenida concuerda perfectamente con la solución analítica.

Para comprobar el correcto funcionamiento y la estabilidad de las condiciones de contorno se ha calculado hasta un tiempo adimensional de  $t = 5400$  que corresponde a 180 períodos. El resultado se muestra en la figura 5 (izquierda). Se observa que la solución no ha cambiado con respecto a la correspondiente a 9 períodos ( $t = 270$ ). En la figura 5 (derecha) se muestra el funcionamiento de la capa absorbente. Se aprecia que la onda acústica es disipada en cuanto abandona el dominio de cálculo. Es destacable la ausencia de oscilaciones espúreas tras un tiempo largo de simulación ( $t = 5400$ ).

A continuación se realiza la simulación del mismo caso pero sobre una corriente supersónica. En este caso, el campo irradiado es completamente diferente al del problema subsónico, ya que todas las ondas de presión se van a propagar aguas abajo con una velocidad  $M \pm 1$ , produciéndose fenómenos de interferencias. Para este ejemplo la fuente está situada en el punto  $(x_s, y_s) = (-50, 0)$ , y se define igual que en el caso anterior. La malla utilizada también es la misma. En este caso, la utilización de  $dt = 0.5$  hace que el problema sea inestable, y es necesario utilizar un paso de tiempo inferior. Se ha utilizado  $dt = 0.25$ .

Al igual que en el caso subsónico, la solución obtenida y mostrada en las figuras 6 y 7 concuerda bien con los resultados de [12]. Se observa que la mayor discrepancia entre la solución obtenida y la analítica (para  $t = 304$ ) está en la zona  $-4 \leq x \leq x_s$ . Esta discrepancia también se observa en [12], y es debida a errores en el cálculo del producto de convolución de la solución analítica [12], más que a errores en la solución calculada.

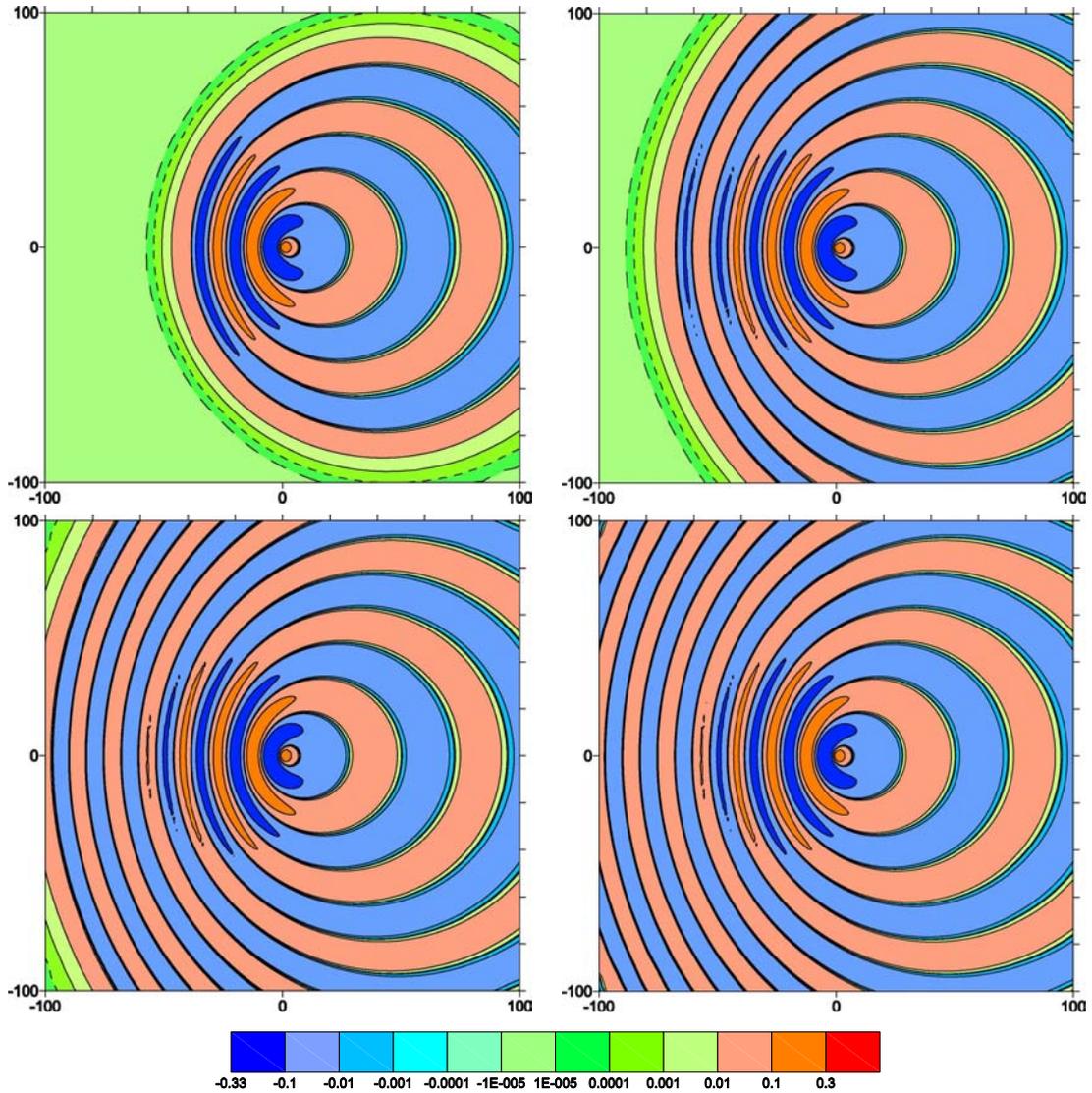


Figura 3: Fuente acústica periódica en un flujo subsónico uniforme  $M_x = 0.5$ . Isolíneas de presión para tiempos  $t = 90$ ,  $t = 150$ ,  $t = 210$   $t = 270$ .

## 5.2. Pulso acústico en el interior de un conducto

Este ejemplo simula la propagación de un pulso acústico en el interior de un conducto, en presencia de un flujo subsónico uniforme con número de Mach  $M = 0.5$ . Este ejemplo está resuelto en [14], mediante un método DRP de cuarto orden y de 7 puntos, y usando condiciones de contorno tipo PML en una malla cartesiana. Este ejemplo pretende mostrar la idoneidad del método FV-MLS para su aplicación a problemas con geometrías limitadas por paredes, como es el caso de turbomáquinas y acústica en conductos.

La geometría del problema consiste en dos paredes sólidas situadas en  $y = -50$  y en

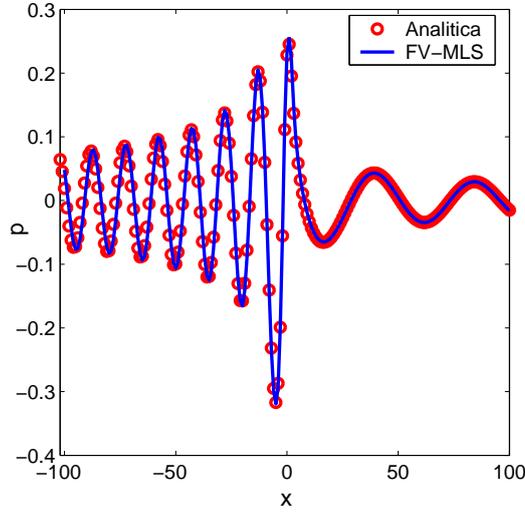


Figura 4: Fuente acústica periódica en un flujo subsónico uniforme  $M_x = 0.5$ . Perfil de presiones en  $y = 0$  en el tiempo  $t = 270$ . Izquierda: Solución obtenida con FV-MLS y  $\kappa_x = \kappa_y = 1$ . Derecha: Solución obtenida con FV-MLS y  $\kappa_x = \kappa_y = 2.5$ .

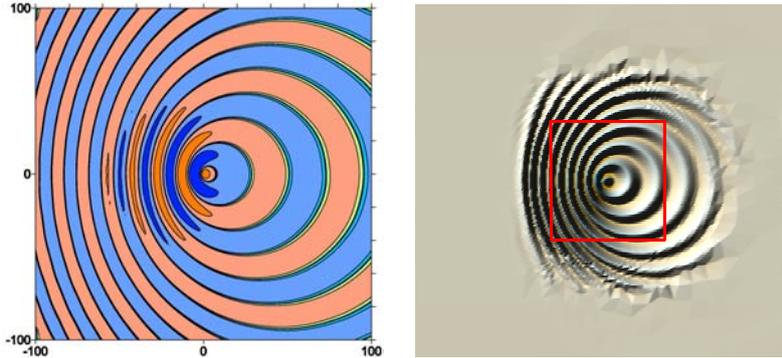


Figura 5: Periodic source in a subsonic ( $M = 0.5$ ) uniform mean flow at time  $t = 5400$ . Pressure contours in the computational domain are shown in the left, and the behavior of the absorbing layer is shown on the right. The acoustic waves are dissipated when they left the computational domain indicated by the red square. The distorted waves that appear next to the front wave are located in the absorbing layer.

$y = 50$ . El dominio de cálculo en la dirección  $x$  es  $[-100, 100]$ . Una capa absorbente de espesor 50 unidades se coloca a la entrada y a la salida. La capa absorbente consta de 10 elementos en la dirección  $x$ , y es de tipo estructurado. La malla en el dominio de cálculo es no estructurada, y se muestra en la figura 8. Para construirla se ha realizado el mallado de un círculo de radio 40 unidades situado en el centro del dominio de cálculo, situando 252 puntos sobre su circunferencia, y realizando un mallado tipo *paving*. El número de elementos del dominio de cálculo es de 20330, y en cada capa absorbente hay 1000 elementos.

Se coloca una perturbación inicial de presión en el punto  $(-50, 0)$ , que tiene la siguiente

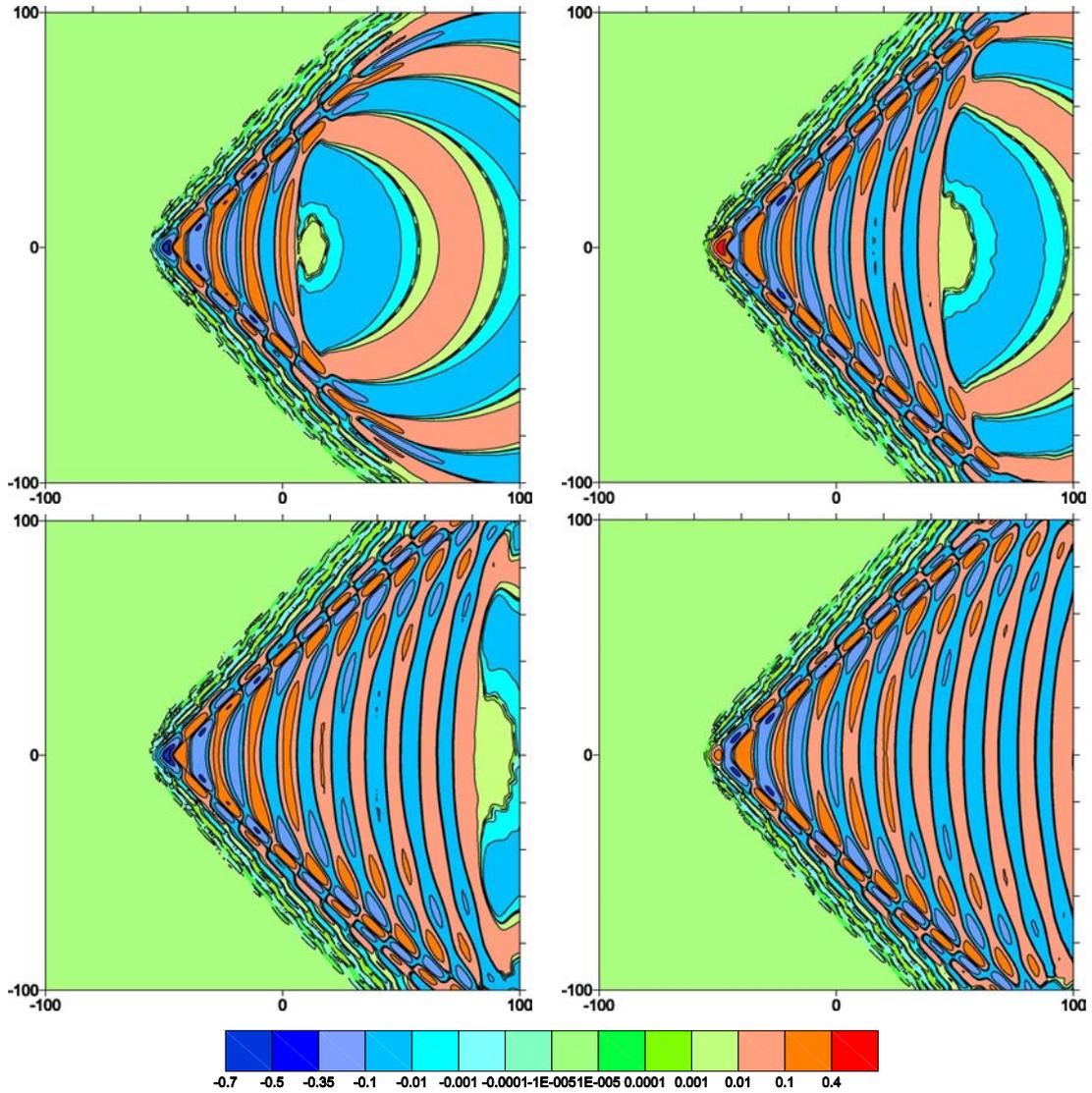


Figura 6: Fuente acústica periódica en un flujo uniforme  $M_x = 1.5$ . Isolíneas de presión para tiempos  $t = 114$ ,  $t = 190$ ,  $t = 266$   $t = 304$ .

forma:

$$p(x, y) = \exp\left(-\ln(2)\frac{(x + 50)^2 + y^2}{36}\right) \quad (18)$$

A medida que el pulso acústico es transportado aguas abajo, se refleja contra las paredes del conducto. Al igual que en [9, 14] se muestran los contornos en tiempos adimensionales de  $t = 60$ ,  $t = 110$ ,  $t = 150$  y  $t = 200$ .

No se aprecian reflexiones visibles desde los bordes de salida, y la solución reproduce las obtenidas en [9, 14].

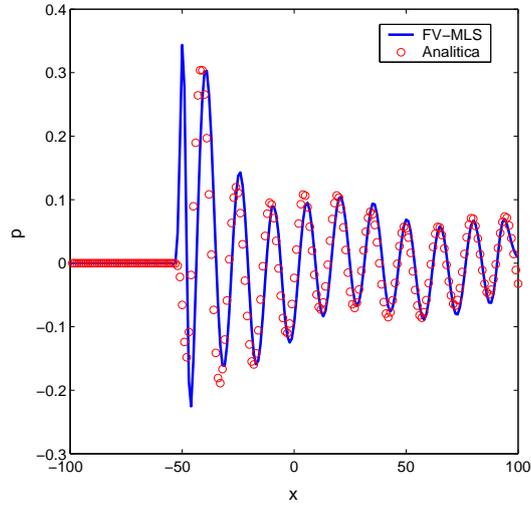


Figura 7: Fuente acústica periódica en un flujo uniforme  $M_x = 1.5$ . Perfil de presiones en  $y = 0$  en el tiempo  $t = 304$ . Izquierda: Solución obtenida con FV-MLS y  $\kappa_x = \kappa_y = 1$ . Derecha: Solución obtenida con FV-MLS y  $\kappa_x = \kappa_y = 2.5$ .

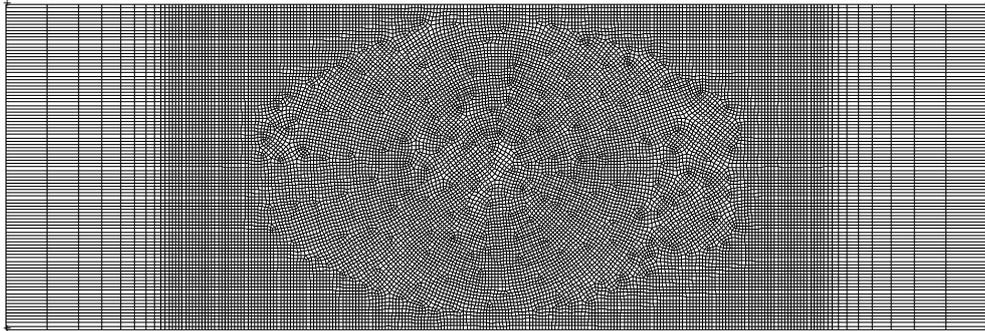


Figura 8: Malla para el problema de la propagación de un pulso acústico en el interior de un conducto en presencia de un flujo uniforme  $M_x = 0.5$ .

### 5.3. Convección de un vórtice en un flujo uniforme

Las ondas entrópicas o vorticales son mucho más sensibles a las condiciones de contorno. Cuando abandonan el dominio de cálculo, estas ondas generan ondas acústicas espúreas cuya magnitud puede ser muy grande, por lo que muy probablemente distorsionarán la solución. Es este apartado se reproduce un ejemplo tomado de la base de datos en acústica que se puede consultar en [15]. Se trata de la convección de un vórtice en un flujo uniforme

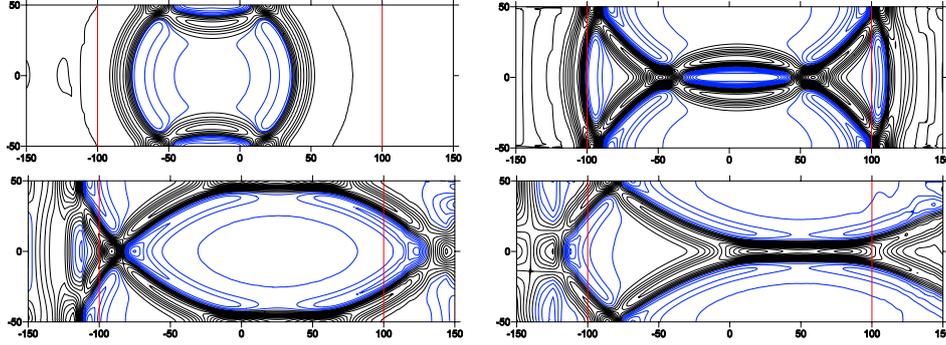


Figura 9: Pulso acústico en el interior de un conducto en presencia de un flujo uniforme  $M_x = 0.5$ . Contornos de presión para tiempos  $t = 60$ ,  $t = 110$ ,  $t = 150$   $t = 200$ . Las líneas azules indican valores negativos de  $p'$ . Las líneas rojas indican el inicio de las capas absorbentes.

$M_x = 0.5$ . Las condiciones iniciales son las siguientes:

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{\gamma} \quad (19)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = 1 \quad (20)$$

$$u(\mathbf{x}) = M_x + \epsilon y \exp\left(-\frac{\ln(2)(x^2 + y^2)}{b^2}\right) \quad (21)$$

$$v(\mathbf{x}) = -\epsilon x \exp\left(-\frac{\ln(2)(x^2 + y^2)}{b^2}\right) \quad (22)$$

siendo  $b = 5$  y  $\epsilon = 0.03$ .

Para la discretización temporal se ha empleado un esquema Runge-Kutta explícito de baja dispersión y disipación (LDDRK)[16] de cuatro pasos. A efectos de comparación, los cálculos se realizan en una malla cartesiana tal que  $-50 \leq x \leq 50$ ,  $-50 \leq y \leq 50$ . Una capa absorbente se coloca desde  $x = 50$  hasta  $x = 200$ . En el caso de disipación de ondas vorticales, el número de puntos y el espaciado de esta capa tiene una gran influencia sobre su efectividad y lamentablemente es muy dependiente del problema, por lo que no se puede saber de antemano cuál es la mejor configuración. Es recomendable aumentar el tamaño de los elementos de manera muy suave al principio de la capa, con el fin de minimizar las reflexiones que se produzcan cuando las ondas en propagación se encuentran con una brusca variación de tamaño de los elementos de la malla.

En el caso de utilizar un filtrado explícito, un factor importante es la elección de los parámetros del filtro que se utiliza en la capa absorbente. Como norma general, es indispensable realizar un filtrado progresivo, dejando el filtrado más agresivo para la parte final de la capa. Esta aplicación progresiva del filtro se puede llevar a cabo mediante la modificación de los parámetros de forma del kernel exponencial. Así, el filtrado se puede

hacer variar espacialmente utilizando la misma expresión empleada en [17]:

$$\kappa = \kappa_{max} - \kappa_{min} \left[ \frac{(x - x_{ini})}{w_{abs}} \right]^\beta \quad (23)$$

siendo  $x_{ini}$  la coordenada en la que empieza la capa absorbente y  $w_{abs}$  el ancho de la misma. El parámetro  $\beta$  es igual a 3.

Para evaluar la importancia de las reflexiones causadas por el vórtice al abandonar el dominio, se observa la evolución temporal del residuo de las fluctuaciones de presión, que tiene como expresión:

$$L_p = \sqrt{\left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (p - p_0)^2 \right]} \quad (24)$$

siendo  $N$  el número de celdas en el interior del dominio de cálculo ( $-50 \leq x \leq 50$ ,  $-50 \leq y \leq 50$ ). Como se puede apreciar en la figura 10 (izquierda), en este caso la utilización de una capa esponja de 30 celdas da mejores resultados que el empleo de un mayor número de celdas. Este resultado es diferente a lo que ocurre al utilizar métodos de diferencias finitas. En éstos, en general se obtienen mejores resultados cuanto mayor es el número de celdas, ya que los métodos de diferencias finitas son muy sensibles a la regularidad del mallado, produciendo oscilaciones espúreas cuando la métrica no es lo suficientemente suave. En el caso de la aproximación con MLS, la métrica no tiene tanta importancia y predomina el mayor efecto disipativo sobre las ondas de alta frecuencia de elementos de tamaño mayor. Sin embargo, cabe recordar que la suavidad en el crecimiento de los primeros elementos de la capa es importante para evitar en lo posible reflexiones cerca del dominio de cálculo que no van a ser atenuadas por la capa absorbente.

Alrededor de  $t = 150$  se aprecia la llegada de las perturbaciones producidas por el paso del vórtice por la zona de la esponja en la que aumenta el tamaño de celda más bruscamente. Los resultados obtenidos presentan unas magnitudes de  $L_p$  iniciales del mismo orden de magnitud que las obtenidas en [15]. Además, la magnitud máxima de  $L_p$  alcanzada mediante el uso de FV-MLS es comparable a las presentadas en [15]. En este ejemplo no se ha aplicado ningún filtrado explícito. El filtrado numérico que realiza el esquema FV-MLS de manera implícita hace que la aplicación del filtrado explícito no sea necesaria. Sin embargo, es posible que en algún otro problema su uso sea recomendable, pero en general se pueden obtener buenos resultados con el filtrado FV-MLS, sin emplear el filtrado explícito.

Se han realizado cálculos con otros métodos de integración temporal. Así, se ha probado el método clásico de cuarto orden de Runge-Kutta, y también con un esquema LDDRK de 6 pasos. No se han encontrado diferencias apreciables entre utilizar uno u otro. Resultados de este tipo se han encontrado en la aplicación de esquemas de Runge-Kutta optimizados con esquemas de cuarto orden centrados de diferencias finitas o con el método DRP [18].

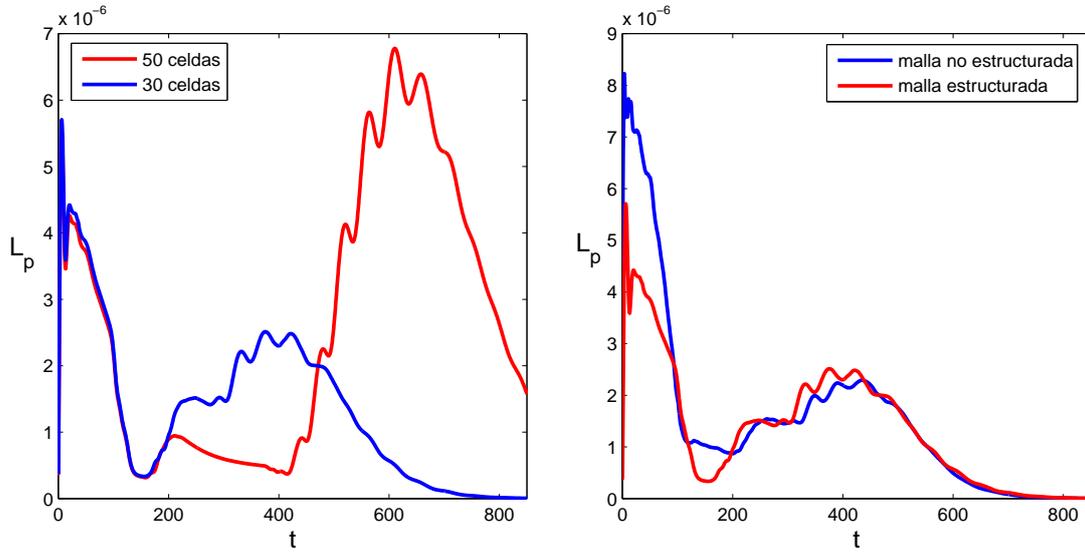


Figura 10: Convección de un vórtice en un flujo uniforme. A la izquierda se muestra el efecto del número de celdas de la capa absorbente. Se observa cómo un menor número de celdas consigue reducir la magnitud de las ondas acústicas reflejadas. A la derecha se comparan los resultados obtenidos en una malla no estructurada con los obtenidos en la malla estructurada.

### 5.3.1. Cálculos en una malla no estructurada

En esta sección se va a resolver el mismo problema de la convección del vórtice en una malla no estructurada. En este caso, además de la dificultad de controlar las ondas de presión que provoca el vórtice al abandonar el dominio de cálculo, se presenta el problema del aumento de las oscilaciones espúreas asociadas a ondas acústicas de transición que aparecen al principio de la simulación. Éstas pueden reducirse hasta cierto punto disminuyendo el paso temporal. La malla empleada (tipo *paving*) se muestra en la figura 11, con un total de 11476 elementos en el dominio de cálculo, y la misma capa absorbente que en el caso estructurado (no mostrada en las figuras). El mallado de la arista en contacto con la capa absorbente se ha realizado con un ligero agrupamiento de las celdas en torno al centro, para provocar que la malla sea no estructurada. Los parámetros del filtro explícito son los mismos que en el caso anterior.

Los resultados de  $L_p$  se muestran en la figura 10 (derecha). Se observa que las fluctuaciones de presión iniciales son mayores que en el caso de una malla cartesiana, como era de esperar, pero del mismo orden de magnitud. El filtrado implícito realizado por el método FV-MLS, amortigua el ruido numérico generado por la condición inicial, de forma que el ruido numérico generado se mantiene en límites aceptables. Las mallas que se han empleado en este ejemplo presentan variaciones bruscas en el tamaño de los elementos y no son de demasiada calidad. Aún así, los resultados son ciertamente buenos. Evidentemente, una mejora en la calidad del mallado, reducirá las fluctuaciones espúreas de presión. Así, es de esperar que el uso de mallas con triángulos obtenga mejores resultados, ya que los

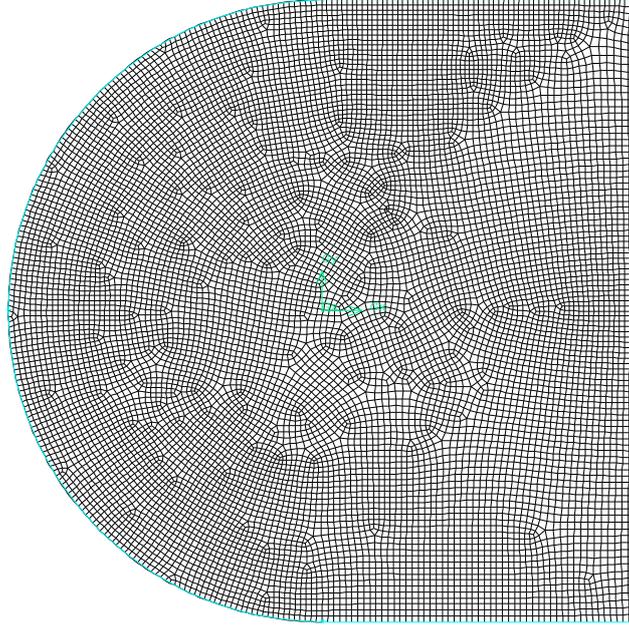


Figura 11: Convección de un vórtice en un flujo uniforme. Malla no estructurada.

mallados triangulares tendrán mayor “suavidad”. En la actualidad se está trabajando en la adaptación del código para su utilización en mallas triangulares.

En la figura 12 se muestra la evolución de la vorticidad dentro de la capa absorbente. Se observa que el vórtice es disipado antes de que alcance el final de la capa absorbente, minimizando así las reflexiones producidas en la condición de contorno de salida. Por otra parte, en la figura 13 se muestra la evolución de la presión en el dominio de cálculo. En  $t = 100$  todavía se observan las ondas de presión correspondientes al ruido numérico inicial. a medida que el tiempo avanza las ondas acústicas producidas por el paso del vórtice por la capa absorbente se introducen en el dominio de cálculo, pero su magnitud es muy débil (se representan los contornos de presión desde  $-8 \cdot 10^{-6}$  hasta  $8 \cdot 10^{-6}$ ).

## 6. Conclusiones

En este artículo se ha aplicado la metodología FV-MLS a la resolución de problemas de aeroacústica en mallas no estructuradas. Los resultados obtenidos en estos problemas son excelentes. El método se comporta de forma estable y precisa, y no presenta excesiva dispersión ni disipación en las pruebas realizadas. Sin embargo, hay que tener en cuenta que si en el problema existen ondas vorticales, pueden aparecer perturbaciones que corrompan la solución si no se utilizan condiciones de contorno absorbentes. De este modo, se ha propuesto el uso de capas absorbentes basadas en el incremento del tamaño de malla para aprovechar el filtrado implícito que realiza el método FV-MLS.

Aunque el filtrado implícito obtiene buenos resultados es necesario continuar la inves-

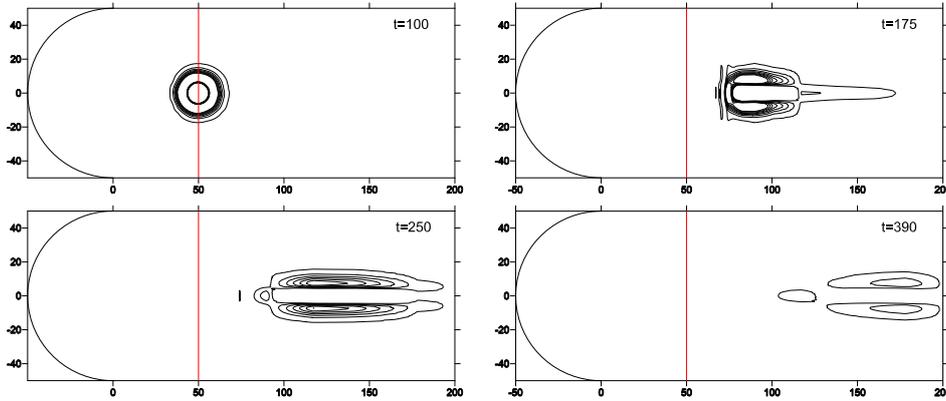


Figura 12: Evolución de la vorticidad en la capa absorbente. En la figura se muestran 8 contornos de vorticidad, desde  $1 \cdot 10^{-4}$  hasta  $36 \cdot 10^{-4}$  para diferentes instantes de tiempo. La línea roja indica el inicio de la capa absorbente.

tigación con los filtros basados en MLS, por su posible utilización en métodos que no introduzcan la disipación suficiente. En particular, parece razonable la posibilidad de optimizar los filtros MLS para cada malla en particular, como parte del preproceso. De este modo, sería posible la utilización del filtro MLS en todo tipo de mallas. El filtro optimizado podría reducir aún más las perturbaciones espúreas de presión formadas con las ondas acústicas de transición que se forman en los primeros instantes de la simulación. Con los filtros de los que se dispone actualmente es muy difícil controlar la aparición de fluctuaciones de presión espúreas al utilizar el filtro en una malla no estructurada. De todas formas, los resultados obtenidos son satisfactorios ya que hay que tener en cuenta además que es posible obtener mallas no estructuradas de mayor calidad que las utilizadas en este capítulo. Es de esperar que la utilización de mallas no estructuradas más regulares a base de triángulos proporcionen mejores resultados. Es preciso mencionar que en una malla no estructurada, las perturbaciones espúreas de presión relacionadas con las ondas acústicas de transición que se forman en los primeros instantes de la simulación son de mayor amplitud que en una malla estructurada. Sin embargo, el filtrado implícito del método FV-MLS permite mantener su magnitud en niveles aceptables.

Aunque los ejemplos en este trabajo resuelven las ecuaciones de Euler linealizadas, es posible la aplicación de todos los métodos desarrollados en este capítulo a ecuaciones no lineales.

## AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido parcialmente financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia (proyectos nº #DPI2006-15275 y #DPI2007-61214), y cofinanciada con fondos FEDER y la Secretaría Xeral de I+D de la Consellería de Innovación, Industria y Comercio de la Xunta de Galicia (# PGDIT06TAM11801PR y archivo #2007/09), y por la Universidade da Coruña.

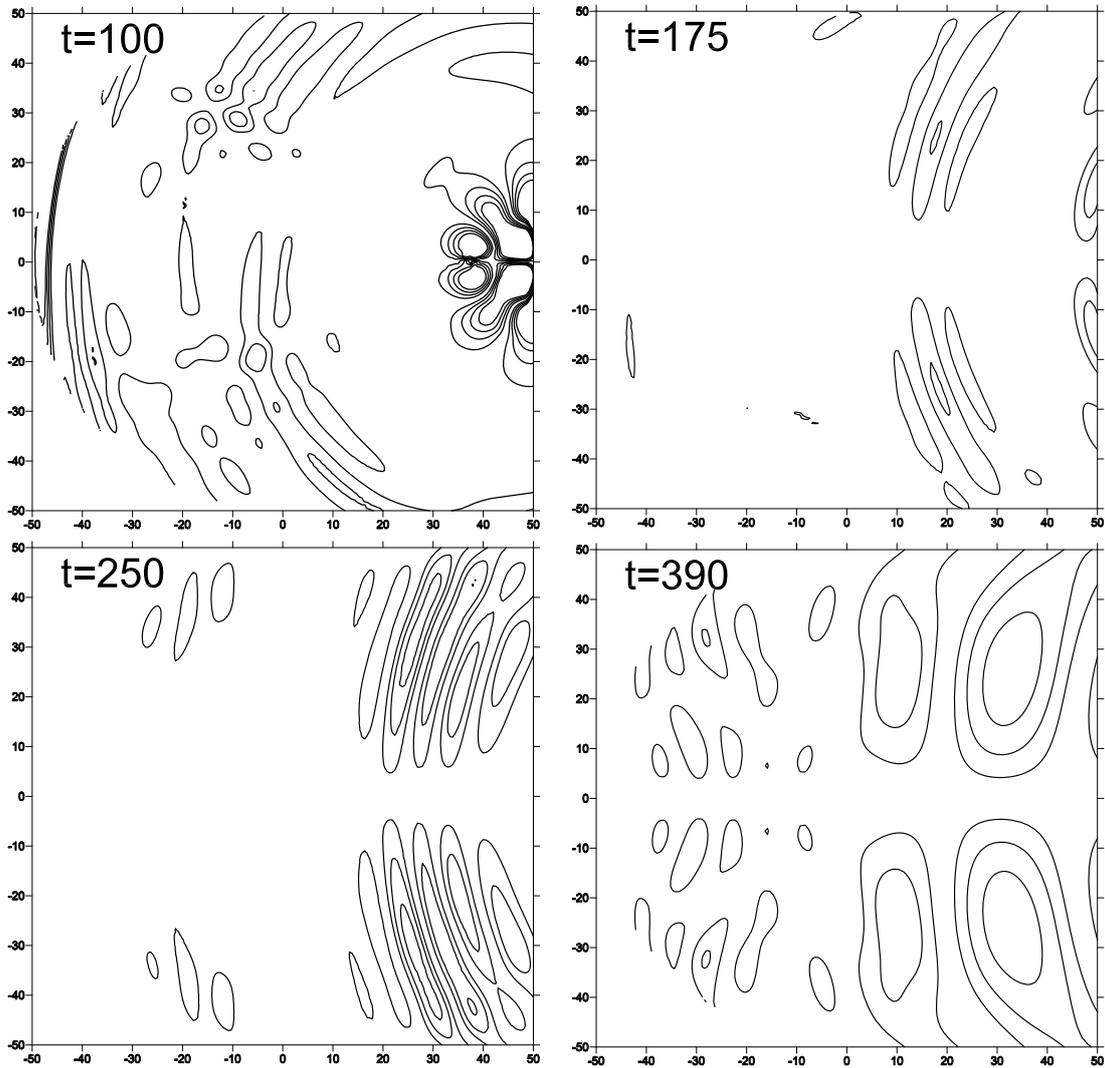


Figura 13: Evolución de las ondas espúreas de presión en el interior del dominio de cálculo. En la figura se muestran 8 contornos de presión, desde  $-8 \cdot 10^{-6}$  hasta  $8 \cdot 10^{-6}$  para diferentes instantes de tiempo. En  $t = 100$  se observan todavía parte de las ondas de presión asociadas a ruido numérico creadas al inicio de la simulación.

## REFERENCIAS

- [1] Hirsch, C., *Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume 2. Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows.*, Chichester: John Wiley and Sons, 2002.
- [2] Colonius, T., *Computational Aeroacoustics: Overview and Numerical Methods*, Computational Aeroacoustics, VKI Lecture Series 2005-2006, 2006.

- [3] Wagner, C., Hüttl, T., Sagaut, P. (eds.), *Large-Eddy Simulation for Acoustics*, Cambridge Aerospace Series, Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [4] Cueto-Felgueroso, L., Colominas, I., Nogueira, X., Navarrina, F., Casteleiro, M., Finite volume solvers and Moving Least-Squares approximations for the compressible Navier-Stokes equations on unstructured grids, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:4712-4736, 2007.
- [5] L. Cueto-Felgueroso, I. Colominas, *High-order Finite Volume methods and multiresolution reproducing kernels*, Archives of Computational Methods in Engineering, 15(2):185-228, 2008. (DOI: 10.1007/s11831-008-9017-y)
- [6] Nogueira, X., Cueto-Felgueroso, L., Colominas, I., Gómez, H., Navarrina, F., Casteleiro, M., On the accuracy of Finite Volume and Discontinuous Galerkin discretizations for compressible flow on unstructured grids, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, DOI: 10.1002/nme.2538, 2009.
- [7] Nogueira, X., Formulaciones de Mínimos Cuadrados Móviles y de Volúmenes Finitos de alto orden para la simulación numérica de flujos compresibles, Tesis Doctoral, Universidade da Coruña, 2009.
- [8] Colonius, T., Lele, S. K., Moin, P., *Boundary conditions for direct computation of aerodynamic sound generation*, AIAA Journal, 31(9):1574-1582, 1993.
- [9] Edgar, N.B., Visbal, M. R., *A General Buffer Zone Type Non-Reflecting Boundary Condition For Computational Aeroacoustics*, AIAA paper 2003-3300, 2003.
- [10] Lele, S. K., *Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution*, Journal of Computational Physics 103:16-42, 1992.
- [11] Tam, C. K. W. and Webb, J. C., *Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics*, Journal of Computational Physics, 107:262-281, 1993.
- [12] Bailly, C., Juvé, D., *Numerical Solution of Acoustic Propagation Problems Using Linearized Euler Equations*, AIAA Journal, 38(1):22-29, 2000.
- [13] Blacker, T. D., Stephenson M. B., *Paving: A new approach to automated quadrilateral mesh generation*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 32(4):811-847, 1991.
- [14] Hu, F. Q., *On Constructing Stable Perfectly Matched Layers as an Absorbing Boundary Condition for Euler equations*, AIAA paper 2002-0227, 2002.
- [15] Acoustic Database, <http://www.codiciel.fr/databse/acoustic/2D/vortex/vortex.html>

- [16] Hu, F. Q., Hussaini M. Y., Manthey, J. L., *A Low-Dissipation and Low Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics*, Journal of Computational Physics 124:177-191, 1996.
- [17] Freund, J. B., *Proposed Inflow/Outflow Boundary Condition for Direct Computation of Aerodynamic Sound*, AIAA Journal, 35:740-742, 1997.
- [18] Goodrich, J. W., *A Comparison of Numerical Methods for Computational Aeroacoustics*, AIAA paper 99-1943, 1999.