

Una formulación numérica sin malla basada en los métodos SPH con ponderación de Galerkin

L. Cueto-Felgueroso, I. Colominas*, G. Mosqueira, F. Navarrina, M. Casteleiro

*Grupo de Métodos Numéricos en Ingeniería, GMNI
Depto. de Métodos Matemáticos y de Representación, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de La Coruña
Campus de Elviña, 15192 La Coruña, ESPAÑA*

RESUMEN

En este artículo se propone una formulación numérica sin malla de tipo Galerkin basada en el método de partículas SPH con aproximación de mínimos cuadrados móviles y su aplicación a problemas de mecánica de fluidos con superficie libre. El esquema de Galerkin proporciona una metodología general que permite analizar muchos de los métodos propuestos en el ámbito de las formulaciones de tipo SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) y desarrollar algoritmos consistentes. La viabilidad de la metodología sin malla que se propone se demuestra con varios ejemplos en los que se analizan fenómenos de gran complejidad o con fuertes distorsiones en el dominio de solución.

SUMMARY

In this paper we propose a Galerkin based SPH formulation with moving least squares meshless approximation, applied to free surface flows. The Galerkin scheme provides a clear framework to analyze several procedures widely used in the classical SPH literature, suggesting that some of them should be reformulated in order to develop consistent algorithms. The performance of the methodology proposed is tested through various dynamic simulations, demonstrating the attractive ability of particle methods to handle severe distortions and complex phenomena.

PALABRAS CLAVE: Mecánica de Fluidos, Métodos Sin Malla, Métodos SPH, Flujo de Fluidos en Superficie Libre, Método de Galerkin.

1. INTRODUCCIÓN

Desde principios de los años noventa, los métodos “sin malla” han experimentado un fuerte desarrollo en el ámbito de la Mecánica Computacional. Entre éstos, los métodos de partículas proporcionan muy buenas soluciones (al menos cualitativas) a problemas de gran complejidad, habiéndose avanzado notablemente en los últimos años en su fundamentación teórica.

Las formulaciones “sin malla” están fundamentadas en técnicas de interpolación específicas como las de estimación de tipo *kernel* [1] o de aproximaciones de mínimos cuadrados móviles [2]. No

*Correspondencia a: E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad de La Coruña, Campus de Elviña, 15192 La Coruña, ESPAÑA. (Email: ice@udc.es)

obstante, los métodos “sin malla” en Mecánica Computacional no consisten únicamente en esquemas de interpolación distintos, sino que constituyen una potente herramienta para resolver las ecuaciones de la mecánica de medios continuos sin necesidad de efectuar una partición explícita del dominio en determinados subdominios no solapados. Ésta es el rasgo distintivo esencial de los métodos “sin malla” pero también el origen de sus conocidos “puntos flacos”. A diferencia de los métodos de elementos finitos, la ausencia de un esquema espacial complica la aplicación de determinadas metodologías numéricas tales como el método de residuos ponderados (método de Galerkin). No obstante, debemos notar que estas técnicas que constituyen uno de los pilares principales para el desarrollo de implementaciones prácticas de los métodos “sin malla” pueden no ser tan adecuadas para los métodos de partículas como lo son para los métodos de elementos finitos. Así, el avance en el conocimiento y fundamentación matemática debería sin duda proporcionar mejores técnicas para obtener las ecuaciones discretas de la mecánica computacional sacando el mayor provecho posible de las formulaciones de partículas.

El método SPH (siglas en inglés del *Smoothed Particle Hydrodynamics method*) fue desarrollado a finales de los años setenta para la simulación de problemas de dinámica de fluidos en astrofísica [3],[4]. La extensión en la mecánica de sólidos de estos métodos fue iniciada por Libersky [5] y Randles [6]. Posteriormente, Johnson y Beissel propusieron el algoritmo NSF (*Normalized Smoothing Function*) [7], y Bonet et al. [8],[9] y Chen et al. [10] desarrollaron otros métodos basados en el SPH y sus correcciones. En fechas recientes, Dilts ha introducido las funciones de forma de mínimos cuadrados móviles (*MLS functions*) en sus cálculos basados en el método SPH [11].

Las formulaciones SPH más tempranas incluían un nuevo esquema de aproximación y unas determinadas ecuaciones discretas características (las llamadas “ecuaciones SPH”), que pueden parecer extrañas para aquellos investigadores experimentados en métodos con un mayor grado de formalismo como el de elementos finitos. La formulación que se presenta en este artículo surge de un planteamiento distinto, y las ecuaciones discretas se obtienen a partir de un esquema de residuos ponderados. Esta deducción puede resultar algo desconcertante para aquellos investigadores acostumbrados a la presentación “clásica” de las ecuaciones SPH. Sin embargo, en nuestra opinión las formulaciones de residuos ponderados o de Galerkin proporcionan un marco teórico sólido para desarrollar algoritmos más consistentes.

El artículo se desarrolla del siguiente modo. En primer lugar se revisan brevemente las aproximaciones SPH estándar y las aproximaciones de mínimos cuadrados móviles. Seguidamente se presentan las ecuaciones del modelo matemático y se obtienen las ecuaciones discretas a partir de una formulación de residuos ponderados. Finalmente se discuten algunos aspectos computacionales importantes y se presentan diversos ejemplos de aplicación a la simulación de problemas de dinámica de fluidos y de flujo con superficie libre.

2. APROXIMACIONES “SIN MALLA”

2.1. Aproximación SPH.

El modo más sencillo de construir funciones de prueba y de test “sin malla” corresponde a las clásicas aproximaciones SPH dadas por

$$N_j(\mathbf{x}) = V_j W_j(\mathbf{x}) = V_j W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) \quad (1)$$

donde el núcleo $W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h)$ es una función *suave* con soporte compacto centrada en la partícula j , y V_j es el “volumen” estadístico asociado a la partícula j . El parámetro h , usualmente llamado

(*smoothing length*) en la bibliografía sobre los métodos SPH o “parámetro de dilatación” (*dilation parameter*) en la bibliografía sobre los métodos RKPM (*Reproducing Kernel Particle method*) [12], es una cierta medida característica del tamaño del soporte de W_j (por ejemplo, el radio en funciones de soporte circular). Las funciones que suelen emplearse con mayor frecuencia como núcleos son las exponenciales o los *splines*. De este modo, la aproximación SPH $\hat{u}(\mathbf{x})$ de una función dada $u(\mathbf{x})$ puede escribirse en términos de las funciones de forma (1) y de determinados *parámetros nodales* o *parámetros de partícula* $\{u_j\}$ como

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x})u_j = \sum_{j=1}^n V_j W_j(\mathbf{x})u_j \quad (2)$$

Con los núcleos usualmente empleados, esta aproximación es poco precisa en las proximidades de los contornos del dominio de la función interpolada dado que no posee ni tan siquiera consistencia de orden cero, es decir

$$\sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) \neq 1 \quad (3)$$

Consecuentemente, el conjunto de funciones $\{N_j(\mathbf{x}), j = 1, \dots, n\}$, donde n es el número total de partículas, no constituye una partición de la unidad, en el sentido dado por Duarte [13]. El gradiente de $\hat{u}(\mathbf{x})$ se evaluaría como

$$\nabla_{\mathbf{x}} \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \nabla_{\mathbf{x}} N_j(\mathbf{x})u_j = \sum_{j=1}^n V_j \nabla_{\mathbf{x}} W_j(\mathbf{x})u_j \quad (4)$$

En la bibliografía sobre los métodos SPH (ver por ejemplo [14], [15]), se proponen frecuentemente expresiones alternativas para asegurar determinadas propiedades de conservación en las ecuaciones discretas, que no están garantizadas por el esquema de aproximación.

2.2. Aproximación de Mínimos Cuadrados Móviles.

Las formulaciones de mínimos cuadrados móviles son otro de los grandes tipos de formulaciones “sin malla”. Aunque difieren en su formulación, las basadas en funciones “núcleo” (como por ejemplo *Moving Least Squares* o *Reproducing Kernel Particle Method*) se pueden también interpretar como métodos SPH corregidos y son muy similares en la práctica.

A continuación se analizan bajo el mismo marco fundamental las formulaciones *Moving Least Squares (MLS)* [2] y *Moving Least Squares Reproducing Kernel Particle Method (MLSRKPM)* [12]. Sea una función $u(\mathbf{x})$ definida en un dominio Ω acotado o no acotado. La idea básica de la formulación MLS consiste en aproximar $u(\mathbf{x})$ en un punto dado \mathbf{x} mediante un ajuste de mínimos cuadrados polinómico de la función $u(\mathbf{x})$ en un entorno de \mathbf{x} en la forma:

$$u(\mathbf{x}) \approx \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m p_i(\mathbf{x})\alpha_i(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \quad (5)$$

donde $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$ es una base polinómica m -dimensional y $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}}$ es un conjunto de parámetros, tales que minimicen el siguiente funcional de error:

$$J(\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z})\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}}) = \int_{\mathbf{y} \in \Omega_{\mathbf{x}}} W(\mathbf{z} - \mathbf{y}, h)\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \left[u(\mathbf{y}) - \mathbf{p}^T(\mathbf{y})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z})\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \right]^2 d\Omega_{\mathbf{x}} \quad (6)$$

siendo $W(\mathbf{z} - \mathbf{y}, h)\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}}$ un núcleo simétrico con soporte compacto (llamado $\Omega_{\mathbf{x}}$), elegido entre los núcleos que habitualmente se emplean en los métodos SPH. Como ya se estableció anteriormente, h es la longitud de suavizado y es una medida del tamaño de $\Omega_{\mathbf{x}}$. Así, la minimización de J con respecto a $\boldsymbol{\alpha}$ conduce a

$$\int_{\mathbf{y} \in \Omega_{\mathbf{x}}} \mathbf{p}(\mathbf{y})W(\mathbf{z} - \mathbf{y}, h)\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} u(\mathbf{y})d\Omega_{\mathbf{x}} = \mathbf{M}(\mathbf{x})\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z})\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \quad (7)$$

donde la matriz de momentos $\mathbf{M}(\mathbf{x})$ viene dada por

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{y} \in \Omega_{\mathbf{x}}} \mathbf{p}(\mathbf{y})W(\mathbf{z} - \mathbf{y}, h)\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} \mathbf{p}^T(\mathbf{y})d\Omega_{\mathbf{x}} \quad (8)$$

En las formulaciones “sin malla” se elige un conjunto de n partículas del dominio global Ω , de modo que la evaluación de las integrales en (7) y (8) puede realizarse usando las partículas del interior del dominio $\Omega_{\mathbf{x}}$ como puntos de la cuadratura (esto es, llevar a cabo una integración nodal), lo que conduce a

$$\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{z})\Big|_{\mathbf{z}=\mathbf{x}} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{P}_{\Omega_{\mathbf{x}}}\mathbf{W}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x})\mathbf{u}_{\Omega_{\mathbf{x}}} \quad (9)$$

donde el vector $\mathbf{u}_{\Omega_{\mathbf{x}}}$ contiene los parámetros nodales de las partículas de $\Omega_{\mathbf{x}}$, la versión discreta de \mathbf{M} es $\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_{\Omega_{\mathbf{x}}}\mathbf{W}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x})\mathbf{P}_{\Omega_{\mathbf{x}}}^T$, y las matrices $\mathbf{P}_{\Omega_{\mathbf{x}}}$ y $\mathbf{W}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ vienen dadas por [12]:

$$\mathbf{P}_{\Omega_{\mathbf{x}}} = (\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) \quad \cdots \quad \mathbf{p}(\mathbf{x}_{n_{\mathbf{x}}})) \quad (10)$$

$$\mathbf{W}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \text{diag} \{W_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)V_i\}, \quad i = 1, \dots, n_{\mathbf{x}} \quad (11)$$

En las expresiones anteriores, $n_{\mathbf{x}}$ denota el número total de partículas en el entorno de un punto \mathbf{x} y V_i y \mathbf{x}_i son, respectivamente, el volumen estadístico (empleado como peso de la cuadratura numérica) y las coordenadas asociadas a la partícula i . Obsérvese que los volúmenes estadísticos de las partículas del entorno están incluidas en la matriz $\mathbf{W}_{\mathbf{V}}$, obteniéndose la versión MLS del *Reproducing Kernel Particle Method* [16]. Por otra parte, puede emplearse \mathbf{W} en lugar de $\mathbf{W}_{\mathbf{V}}$,

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = \text{diag} \{W_i(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)\}, \quad i = 1, \dots, n_{\mathbf{x}} \quad (12)$$

que se corresponde con la aproximación de mínimos cuadrados móviles clásica (en la integración nodal del funcional (6) se asocia el mismo peso de integración asociado a todas las partículas). Si ahora se sustituye (9) en (5), el esquema de interpolación se puede identificar fácilmente y ser escrito en la forma:

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{P}_{\Omega_{\mathbf{x}}}\mathbf{W}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x})\mathbf{u}_{\Omega_{\mathbf{x}}} = \mathbf{N}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}_{\Omega_{\mathbf{x}}} \quad (13)$$

por lo que las funciones de forma de mínimos cuadrados móviles vienen dadas por:

$$\mathbf{N}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{P}_{\Omega_{\mathbf{x}}}\mathbf{W}_{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

Generalmente se emplean bases polinómicas definidas localmente y escaladas, en lugar de las definidas globalmente $\mathbf{p}(\mathbf{y})$. Así, si una función se evalúa en el punto \mathbf{x} , las funciones de la base serían de la forma $\mathbf{p}(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{h})$. Consecuentemente, las funciones de forma son

$$\mathbf{N}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{0})\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{P}_{\Omega_{\mathbf{x}}}\mathbf{W}_V(\mathbf{x}) \quad (15)$$

En los ejemplos en dos dimensiones que se presentan en este trabajo, la base de funciones polinómicas lineales que se ha empleado es $\mathbf{p}(\frac{\mathbf{y}-\mathbf{x}}{h}) = (1, \frac{y_1-x_1}{h}, \frac{y_2-x_2}{h})$, donde (x_1, x_2) y (y_1, y_2) son las coordenadas cartesianas de los puntos \mathbf{x} y \mathbf{y} . Esta base proporciona consistencia lineal, esto es

$$\sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) = 1, \quad \sum_{j=1}^n \nabla_{\mathbf{x}} N_j(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j N_j(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j \otimes \nabla_{\mathbf{x}} N_j(\mathbf{x}) = \mathbf{I} \quad (17)$$

2.3. Elección del núcleo.

En la bibliografía pueden encontrarse una amplia gama de funciones que se han propuesto como posibles núcleos y que en la mayor parte consisten en funciones exponenciales o *splines*, sin que parezca existir un criterio para la elección óptima de esta función. Uno de los núcleos que más se emplea es el siguiente *spline* cúbico[14]:

$$W_j(\mathbf{x}) = W(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) = \frac{\alpha}{h^\nu} \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}s^2 + \frac{3}{4}s^3 & s \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-s)^3 & 1 < s \leq 2 \\ 0 & s > 2 \end{cases} \quad (18)$$

donde $s = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|}{h}$, ν es la dimensión del problema y α toma los valores $\frac{2}{3}, \frac{10}{7\pi}$ o $\frac{1}{\pi}$ en una, dos y tres dimensiones respectivamente. El coeficiente α/h^ν es un factor de escala que se introduce únicamente si se emplean interpolaciones SPH no corregidas con el fin de garantizar la propiedad de normalidad $\int W dV = 1$. En los ejemplos que presentaremos en este artículo no se hace uso de este factor de escala.

Esta formulación se corresponde con un núcleo de tipo radial, esto es, el soporte del núcleo es un círculo (en 2D) o una esfera (en 3D) de radio $2h$. No obstante, los núcleos para problemas en 2D y 3D pueden construirse también por producto de los núcleos unidimensionales en la forma

$$W_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j, h) = \prod_{n=1}^{\nu} W_j^n(x^n - x_j^n, h^n) \quad (19)$$

siendo x^n la n -ésima coordenada de la partícula \mathbf{x} . En esta definición del núcleo, el núcleo unidimensional W_j^n y la longitud de suavizado característica h^n pueden diferir para cada dimensión. Si se emplea el mismo núcleo en todas las dimensiones entonces el soporte es un cuadrado (en 2D) o un cubo (en 3D).

3. ECUACIONES DEL CONTINUO

En el estudio de las deformaciones finitas de un medio continuo se pueden elegir para su descripción dos posibles sistemas de coordenadas [17],[18]:

- una determinada configuración de referencia (usualmente una “configuración inicial”). Esta descripción se denomina “material” o Lagrangiana y en ella todas las magnitudes relevantes están referidas a la configuración inicial del problema Ω^0 ;
- la configuración actual del medio. Esta descripción se denomina “espacial” o Euleriana y en ella todas las magnitudes relevantes están referidas a la configuración actual del problema Ω .

La primera es más frecuente en mecánica de sólidos, en tanto que la segunda es más habitual en mecánica de fluidos. En general, estas dos descripciones conducirán a discretizaciones que no serán equivalentes cuando se apliquen con métodos de partículas [19].

En principio, consideraremos que el comportamiento de un medio continuo está gobernado por las ecuaciones

- (a) *Ecuación de continuidad*. La conservación de masa puede escribirse en forma material como la ecuación algebraica:

$$\rho J = \rho^0 \quad (20)$$

siendo ρ^0 y ρ las densidades inicial y actual respectivamente, y J es el determinante del gradiente de deformación, $J = \det(\mathbf{F})$, $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{X}}$. En lo sucesivo, \mathbf{X} , $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X})$, $\nabla_{\mathbf{X}}$ y $\nabla_{\mathbf{x}}$ denotan las coordenadas y los operadores gradiente en las configuraciones de referencia y actuales, respectivamente. La mayor parte de los métodos SPH emplean una forma euleriana de la ecuación de conservación de masa dada por,

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div}(\mathbf{v}) \quad (21)$$

donde $\frac{d}{dt}$ indica la derivada temporal material y $\operatorname{div}(\mathbf{v})$ se calcula en la configuración actual en términos del tensor \mathbf{l} gradiente de velocidad como [17]:

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \operatorname{tr}(\mathbf{l}), \quad \mathbf{l} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \quad (22)$$

- (b) *Momento lineal*. En la descripción lagrangiana, la ecuación de conservación del momento lineal se puede escribir como:

$$\rho^0 \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{b} \quad (23)$$

donde \mathbf{b} indica las fuerzas de cuerpo por unidad de volumen y \mathbf{P} es el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff. Por otra parte, su forma euleriana es

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \quad (24)$$

donde las tensiones se expresan ahora mediante el tensor de tensiones de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$, y ρ es la densidad actual. Nótese que en mecánica de fluidos puede también escribirse una ecuación de momento en una forma arbitrariamente lagrangiana-euleriana (ALE) como [20]:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}^* \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} \right) = \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \quad (25)$$

siendo \mathbf{v}^* la velocidad convectiva. En el análisis por elementos finitos, \mathbf{v}^* se define como la diferencia entre la velocidad del fluido y la velocidad de la malla. Un estudio más detallado y exhaustivo sobre este punto puede encontrarse en el texto de Donea y Huerta [21] sobre formulaciones de elementos finitos en problemas de flujo de fluidos. Dado que los métodos de partículas tipo SPH siguen el movimiento del conjunto de partículas entonces $\mathbf{v}^* = \mathbf{0}$ y el término convectivo de la ecuación (25) se anula. Ésta es considerada una descripción lagrangiana del movimiento. La ecuación (24) corresponde a una forma euleriana por cuanto las magnitudes relevantes están referidas a la configuración actual, aunque la descripción sea lagrangiana en el sentido anteriormente descrito.

- (c) *Conservación del momento angular.* En nuestros estudios no consideraremos ni distribuciones de masa con momentos polares ni medios magnetizables.
- (d) *Conservación de la energía.* La conservación de la energía también puede ser considerada en los procesos que involucren intercambio de calor u otros fenómenos relacionados:

$$\rho \frac{dU}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} - \text{div}(\mathbf{q}) + \rho Q \quad (26)$$

siendo U la energía interna por unidad de masa, \mathbf{q} el flujo de calor, Q las fuentes de calor (por unidad de tiempo y de masa) y \mathbf{d} el tensor gradiente de deformaciones, definido como

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}^T) \quad (27)$$

En este trabajo estudiaremos únicamente fenómenos gobernados por las ecuaciones (20)–(24) aunque la extensión de la metodología considerando todos los efectos es prácticamente inmediata.

4. ECUACIONES DISCRETAS

4.1. Formulación de residuos ponderados: funciones de prueba y funciones de test.

Las ecuaciones discretizadas para una formulación basada en métodos sin malla se puede deducir a partir del planteamiento de residuos ponderados. Así la versión discreta de la forma variacional débil de Galerkin es casi equivalente a la que se obtiene por estimaciones del núcleo [22] en las formulaciones clásicas del método SPH. En consecuencia, esta equivalencia sugiere que el método SPH se puede estudiar en el contexto de los métodos variacionales de Galerkin.

El punto de partida lo constituye la obtención de una forma variacional de la ecuación de momento:

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \delta \mathbf{v} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{l} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (28)$$

siendo Ω el dominio del problema, Γ su contorno y \mathbf{n} el versor normal exterior en cada punto del contorno. Si las funciones de test y de prueba $\delta \mathbf{v}$ y \mathbf{v} se aproximan por las funciones $\delta \hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$, se obtiene

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} \cdot \delta \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega = - \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}} : \delta \hat{\mathbf{l}} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \delta \hat{\mathbf{v}} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \cdot \delta \hat{\mathbf{v}} \, d\Gamma \quad (29)$$

y las ecuaciones discretas resultan de introducir en esta forma variacional las funciones de test y de prueba y sus gradientes construidas según una interpolación “sin malla”, esto es

$$\delta\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \delta\mathbf{v}_i N_i^*(\mathbf{x}), \quad \nabla\delta\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \delta\mathbf{v}_i \otimes \nabla_{\mathbf{x}} N_i^*(\mathbf{x}) \quad (30)$$

$$\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j N_j(\mathbf{x}), \quad \nabla\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j \otimes \nabla_{\mathbf{x}} N_j(\mathbf{x}) \quad (31)$$

lo que conduce a

$$\sum_{i=1}^n \delta\mathbf{v}_i \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \rho N_i^*(\mathbf{x}) N_j(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} d\Omega + \int_{\Omega} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \nabla_{\mathbf{x}} N_i^*(\mathbf{x}) d\Omega - \int_{\Omega} N_i^*(\mathbf{x}) \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma} N_i^*(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} d\Gamma \right\} = 0 \quad (32)$$

Así, para cada partícula i , se debe satisfacer la siguiente identidad:

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \rho N_i^*(\mathbf{x}) N_j(\mathbf{x}) \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} d\Omega = - \int_{\Omega} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \nabla_{\mathbf{x}} N_i^*(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\Omega} N_i^*(\mathbf{x}) \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} N_i^*(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} d\Gamma \quad (33)$$

Dado que en este trabajo consideraremos ponderaciones de tipo Bubnov-Galerkin entonces se cumple que $N_j^* = N_j$. La versión lagrangiana de (33) (esto es, con las magnitudes referidas a la configuración inicial Ω^0 y con funciones de prueba lagrangianas) es:

$$\sum_{j=1}^n \int_{\Omega^0} \rho^0 N_i^*(\mathbf{X}) N_j(\mathbf{X}) \frac{d\mathbf{v}_j}{dt} d\Omega^0 = - \int_{\Omega^0} \widehat{\mathbf{P}} \nabla_{\mathbf{X}} N_i^*(\mathbf{X}) d\Omega^0 + \int_{\Omega^0} N_i^*(\mathbf{X}) \mathbf{b} d\Omega^0 + \int_{\Gamma^0} N_i^*(\mathbf{X}) \widehat{\mathbf{P}} \mathbf{n} d\Gamma^0 \quad (34)$$

donde \mathbf{X} indica las coordenadas de la partícula en la configuración de referencia.

La identidad (33) puede escribirse en una forma compacta más conveniente:

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{F}^{int} + \mathbf{F}^{ext} \quad (35)$$

donde $\mathbf{M} = \{m_{ij}\}$ es la matriz de masas, $\mathbf{F}^{int} = \{\mathbf{f}_i^{int}\}$ son las fuerzas internas y $\mathbf{F}^{ext} = \{\mathbf{f}_i^{ext}\}$ son las fuerzas externas, que vienen dadas por:

$$m_{ij} = \int_{\Omega} \rho N_i^*(\mathbf{x}) N_j(\mathbf{x}) d\Omega \quad (36)$$

$$\mathbf{f}_i^{int} = - \int_{\Omega} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \nabla_{\mathbf{x}} N_i^*(\mathbf{x}) d\Omega \quad (37)$$

$$\mathbf{f}_i^{ext} = \int_{\Omega} N_i^*(\mathbf{x}) \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma} N_i^*(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} d\Gamma \quad (38)$$

Evidentemente se pueden derivar las expresiones análogas a éstas para la versión lagrangiana (34).

Por otra parte, las funciones de forma “sin malla” no se anulan en los contornos con condiciones esenciales; consecuentemente, la integral en los contornos en (38) puede descomponerse en dos términos

$$\int_{\Gamma} N_i^*(\mathbf{x}) \widehat{\sigma} \mathbf{n} d\Gamma = \int_{\Gamma_u} N_i^*(\mathbf{x}) \widehat{\sigma} \mathbf{n} d\Gamma_u + \int_{\Gamma_n} N_i^*(\mathbf{x}) \widehat{\sigma} \mathbf{n} d\Gamma_n \quad (39)$$

donde Γ_u y Γ_n denotan los contornos en los que se prescriben respectivamente condiciones esenciales y condiciones naturales, y $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_n$. Sobre este aspecto de la formulación se incidirá en este artículo más adelante.

Finalmente, si se considera la ecuación (21) de conservación de la masa, y se hace uso de la expresión (31) para $\nabla \widehat{\mathbf{v}}_i$, debe cumplirse para cada partícula

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \text{div}(\mathbf{v})_i = -\rho_i \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j \cdot \nabla_{\mathbf{x}} N_j(\mathbf{x}_i) \quad (40)$$

que es equivalente a considerar una forma variacional de la ecuación de conservación con un esquema de ponderación de colocación puntual.

4.2. Integración numérica.

La integración numérica de las ecuaciones discretizadas de la forma variacional es uno de los aspectos más importantes y controvertidos de los métodos “sin malla” y también el origen de sus conocidas imprecisiones e inestabilidades [9],[22],[23],[24].

Las características esenciales que deben tenerse en cuenta a la hora de elegir o desarrollar un esquema de integración numérica para un método de partículas son las siguientes: *a)* el esquema debe ser razonablemente preciso, *b)* en aplicaciones hidrodinámicas lagrangianas, la cuadratura numérica debe continuar manteniendo el carácter “sin malla” del método, y *c)* el esquema de integración debe ser computacionalmente eficiente.

La fase de integración numérica de las ecuaciones forma parte de la naturaleza intrínseca de los métodos “sin malla” y ha constituido un tema de estudio muy notable en formulaciones basadas en el método de Galerkin como el *Element-Free Galerkin method* [2]. Sin embargo, no ha sido un tema explícitamente estudiado en el ámbito de los métodos SPH, probablemente debido a que la integración nodal forma parte de la fundamentación de las formulaciones SPH más tempranas y porque el método ha sido considerado como una formulación de colocación puntual. En el marco de los métodos SPH, el uso de cuadraturas numéricas alternativas a la integración nodal surge implícitamente en el concepto de los “puntos de tensión” o “*stress-points*”. Recientemente, Belytschko y sus colaboradores [22] han reinterpretado el método SPH como un método de Galerkin con integración nodal. En nuestra opinión, los métodos de Galerkin proporcionan un marco de referencia claro para analizar el uso de los mencionados “*stress-points*”.

4.2.1. Los métodos de partículas y las ecuaciones del continuo. Existen diferencias importantes en lo relativo a la integración numérica entre los métodos “sin malla” y los métodos basados en la generación de una malla correspondiente a la discretización del dominio como el método de elementos finitos. Esencialmente dos: la complejidad de las funciones de forma que definen la interpolación “sin malla” y la ausencia de un marco espacial en el que definir los puntos y pesos de la cuadratura numérica.

Como puede verse en el desarrollo de las secciones previas de este trabajo, las funciones de forma de mínimos cuadrados móviles y sus derivadas son funciones complicadas que en general no pueden ser integradas exactamente empleando cuadraturas numéricas[24]. Por otra parte, los verdaderos dominios de integración de la forma variacional definida globalmente corresponden a las intersecciones entre los soportes de las partículas. Así, dado un conjunto arbitrario de partículas, la definición de dichos dominios como las intersecciones de los soportes de cada partícula puede constituir una tarea inabordable desde un punto de vista computacional en problemas dinámicos al requerir la generación de una “malla de integración” para cada paso de tiempo.

La ausencia de un marco de referencia espacial es una diferencia muy importante y en ella radica la naturaleza de los métodos “sin malla”. Los métodos “con malla” están basados en particiones del dominio en determinados elementos no solapados que representan explícitamente una parte de ese dominio. En problemas en los que se producen fuertes deformaciones del dominio, estos elementos individuales pueden sufrir severas distorsiones con las consiguientes pérdidas de precisión en los cálculos. A su vez, la malla de elementos constituye el marco espacial natural para definir la integración de la forma variacional, que se construye por ensamblaje de las contribuciones elementales — calculadas elemento a elemento—. Asimismo, las ecuaciones discretas establecen equilibrios entre regiones (esto es, los elementos) del dominio que es consistente con la derivación del modelo de la mecánica del continuo.

A diferencia de los elementos, las partículas tienen masa y volumen de la que son representativas implícitamente. Así, los volúmenes están concentrados en las partículas sea cual sea la forma real que tenga el subdominio de la partícula. Esta es una ventaja computacional muy importante de los métodos de partículas, sin embargo el marco espacial no se preserva. Las ecuaciones discretas resultantes de los métodos de partículas también pueden interpretarse como ecuaciones de equilibrio de fuerzas entre ellas, lo que no se corresponde con los fundamentos de la mecánica de medios continuos: en este sentido, la filosofía que subyace en los métodos de partículas no es conceptualmente consistente con los modelos de la mecánica del continuo. Esta contradicción se soslaya al menos parcialmente si las partículas se consideran representativas de una determinada región; sin embargo, obsérvese que el axioma fundamental de Cauchy de mecánica del continuo establece que las interacciones entre regiones tienen lugar en la forma de densidades de fuerzas en los contornos y no fuerzas entre centroides. En conclusión, la “incertidumbre” espacial que introducen las partículas es suficiente para transformar la aparentemente simple integración de la forma variacional de Galerkin en un problema numérico más desafiante.

Seguidamente se revisan brevemente algunas de las técnicas de integración más empleadas que se han propuesto en la bibliografía y se comentan algunos aspectos importantes de su implementación práctica. En este punto, queremos notar que en nuestra opinión, la integración en los métodos “sin malla” es un tema que está lejos de cerrarse y en el que probablemente se producirán avances fundamentales en breve.

4.2.2. Integración nodal. La integración nodal se ha empleado al menos implícitamente en todas las formulaciones SPH desde que se propusieron en los años setenta. Es obvio que es la opción más económica y que el esquema resultante es completamente “sin malla”, esto es, no precisa de ninguna malla auxiliar en el que llevar a cabo la integración. Así, las partículas se emplean como puntos de integración y se eligen como pesos de la cuadratura numérica los correspondientes volúmenes estadísticos de cada una. En el caso de la forma débil de la ecuación de momento euleriana que se ha presentado en la sección anterior, se tiene que

$$\mathbf{M}\mathbf{a} = \mathbf{F}^{int} + \mathbf{F}^{ext} \quad (41)$$

donde

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^n \rho_k N_i^*(\mathbf{x}_k) N_j(\mathbf{x}_k) V_k \quad (42)$$

$$\mathbf{f}_i^{int} = - \sum_{k=1}^n \hat{\sigma}_k \nabla \mathbf{x} N_i^*(\mathbf{x}_k) V_k \quad (43)$$

$$\mathbf{f}_i^{ext} = \sum_{k=1}^n N_i^*(\mathbf{x}_k) \mathbf{b}_k V_k + \sum_{k=1}^n N_i^*(\mathbf{x}_k) \hat{\sigma}_k \mathbf{n} A_k \quad (44)$$

En las expresiones anteriores, V_k representa el volumen tributaio asociado a la partícula k . Las técnicas que se utilizan para determinar dichos volúmenes varían desde las simples particiones del dominio a los diagramas de Voronoi. En las formulaciones SPH más frecuentes, se asocian determinadas densidades y volúmenes iniciales a las partículas, y consiguientemente, masas. Estas masas “físicas” $\{M_k\}$ se mantienen constantes durante la simulación y las densidades son variables que se van actualizando a través de la ecuación de continuidad. Así, los volúmenes de las partículas se obtienen en cada paso de tiempo como $V_k = \frac{M_k}{\rho_k}$. Obsérvese, que en la formulación que se propone en este artículo, las masas “reales” o “físicas” de las partículas M_k son diferentes en general de las masas “numéricas” m_{ij} dadas por (42), y derivadas en el esquema de Galerkin.

La imposición de las condiciones de contorno naturales según (44) requiere primeramente “localizar el contorno”, es decir, obtener una aproximación al contorno formado por ciertas partículas, y seguidamente determinar los pesos de integración A_k asociados a cada partícula del contorno y necesario para calcular (44).

La integración nodal es la causa de las conocidas inestabilidades de los métodos “sin malla”. Beissel y Belytschko [23] y Bonet y Kulasegaram [9] han analizado los resultados de esta cuadratura en el contexto de los métodos *Element Free Galerkin* y SPH corregidos y han propuesto formulaciones variacionales modificadas basadas en estabilizaciones de mínimos cuadrados que requieren las derivadas segundas de las funciones de forma. Por otra parte, Chen y sus colaboradores han propuesto una integración nodal que da lugar a esquemas numéricos estables [25], basada en un suavizado de las deformaciones pero que requiere el diagrama de Voronoi del conjunto de partículas y, por consiguiente, un elevado coste computacional.

4.2.3. Malla de integración auxiliar. El esquema de integración numérica más frecuente en los métodos EFGM y RKPM consiste en la definición de una malla auxiliar de integración formada por celdas no solapadas que cubren la totalidad del dominio y en la que se definen cuadraturas numéricas de Gauss de alto orden (Fig. 1)[26]. En general, estas celdas no se corresponden con los dominios de integración; no obstante, se recupera el “marco espacial” que requiere el método de Galerkin, con el consiguiente coste de generación de la malla de integración. La matriz de masas y el vector de fuerzas resultan en la forma

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^{ninte} \rho_k N_i^*(\mathbf{x}_k) N_j(\mathbf{x}_k) \mathcal{W}_k \quad (45)$$

$$\mathbf{f}_i^{int} = - \sum_{k=1}^{ninte} \hat{\sigma}_k \nabla \mathbf{x} N_i^*(\mathbf{x}_k) \mathcal{W}_k \quad (46)$$

$$\mathbf{f}_i^{ext} = \sum_{k=1}^{ninte} N_i^*(\mathbf{x}_k) \mathbf{b}_k \mathcal{W}_k + \sum_{k=1}^{ninte^B} N_i^*(\mathbf{x}_k) \hat{\sigma}_k \mathbf{n} \mathcal{W}_k^B \quad (47)$$

donde $ninte$ es el número de puntos de integración (generalmente intervienen un número pequeño de puntos de acuerdo con el soporte de las partículas), y \mathcal{W}_k es el peso de integración asociado al punto k . El número de puntos involucrados en la integración de los contornos es $ninte^B$, y \mathcal{W}_k^B es el correspondiente peso de integración de la partícula k del contorno. Esta técnica, que ha sido aplicada con relativo éxito en varios problemas de mecánica computacional [26], no es apropiada en simulaciones SPH lagrangianas, debido a que los dominios cambian continuamente. En su lugar, se ha propuesto en la bibliografía sobre los métodos SPH un esquema de integración similar aunque “relajado”: las llamadas formulaciones de “puntos de tensiones” o “*stress-points*”.

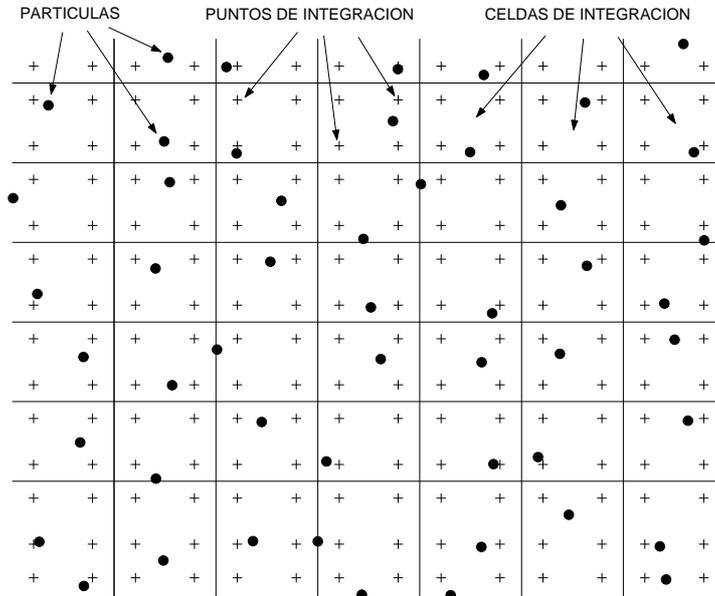


Figura 1. Malla auxiliar de integración.

4.2.4. “Puntos de tensiones” o “*stress-points*”. El concepto de “*stress-points*” fue propuesto por Dyka, Randles y Ingel [27] en un intento de eliminar inestabilidades tensionales del método SPH [28]. La idea básica —que todavía permanece en la bibliografía del método SPH— es la de calcular las tensiones fuera de los centroides, esto es, de las partículas. Este planteamiento realmente significa usar una cuadratura numérica alternativa a la de integración nodal en la forma variacional de Galerkin de las ecuaciones del continuo. En consecuencia, las ecuaciones discretas son absolutamente análogas a (45)–(47), sólo que ahora a los puntos de integración se les llama *stress points*; es decir, se emplean unos

puntos de integración que no tienen porqué coincidir con las partículas y que se encuentran dispersos en la nube de partículas sin estar referidos a ninguna malla auxiliar (Fig. 2). Los “*stress-points*” se definen al inicio de la simulación y su movimiento está completamente determinado por el movimiento de las partículas, esto es

$$\widehat{\mathbf{v}}_i^s = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j N_j(\mathbf{x}_i^s), \quad \frac{d\widehat{\mathbf{x}}_i^s}{dt} = \widehat{\mathbf{v}}_i^s \quad (48)$$

donde el superíndice s se refiere a los “*stress-points*”.

En nuestra implementación, y por consistencia con la definición de las funciones de test, las densidades se calculan en las partículas haciendo uso de la ecuación de continuidad y seguidamente se interpola en los “*stress-points*”, es decir

$$\rho_i^s = \sum_{j=1}^n \rho_j N_j(\mathbf{x}_i^s) \quad (49)$$

Nótese que en la expresión anterior se asume que $\rho_j = \widehat{\rho}_j$, esto es, se emplean como *parámetros nodales de la densidad* ρ_j los valores nodales *reales* $\widehat{\rho}_j$ obtenidos de la ecuación de continuidad. Es de esperar que los errores que pueda introducir esta hipótesis sean despreciables, en particular en el análisis del flujo de fluidos casi incompresibles. Vignjevic et al. [29] han propuesto una implementación distinta en la que la ecuación de continuidad se impone en los “*stress-points*”. Teniendo en cuenta las ecuaciones discretas que resultan es sencillo identificar que los desplazamientos, velocidades y aceleraciones se calculan en las partículas, en tanto que las restantes variables asociadas —como por ejemplo las tensiones— se requieren solamente en los puntos de la cuadratura, esto es, en los “*stress-points*” o “*puntos de tensiones*” [6], [29].

Con esta técnica, los puntos de integración se mueven; es decir, la “malla” de los puntos de integración se adapta continuamente al dominio cambiante, evitando trabajar con una malla auxiliar “rígida”. Llegados a este punto, ya se dispone de los puntos de la cuadratura numérica, sin embargo falta por determinar los pesos de integración de dicha cuadratura.

Nótese que los dos conjuntos de puntos (las partículas y los puntos de integración) están desacoplados. Inicialmente ambos representan en dominio computacional global y se establecen con masas, densidades y volúmenes tales que

$$\sum_{ip=1}^n V_{ip} = V, \quad \sum_{is=1}^{ns} V_{is} = V \quad (50)$$

$$\sum_{ip=1}^n M_{ip} = M, \quad \sum_{is=1}^{ns} M_{is} = M \quad (51)$$

donde M y V son la masa y el volumen inicial del medio estudiado y n y ns son el número de partículas y el número de puntos de integración (los “*stress-points*”). A medida que avanza la simulación, ambos conjuntos derivan en dos dominios y volúmenes computacionalmente diferentes: las partículas contienen la información de las posiciones y movimientos del medio, mientras que el conjunto de los puntos de integración constituye el dominio computacional en el que se hacen los cálculos de las integrales. Es evidente que esta duplicidad de dominios debe ser controlada cuidadosamente para preservar la precisión de los resultados obtenidos con este método.

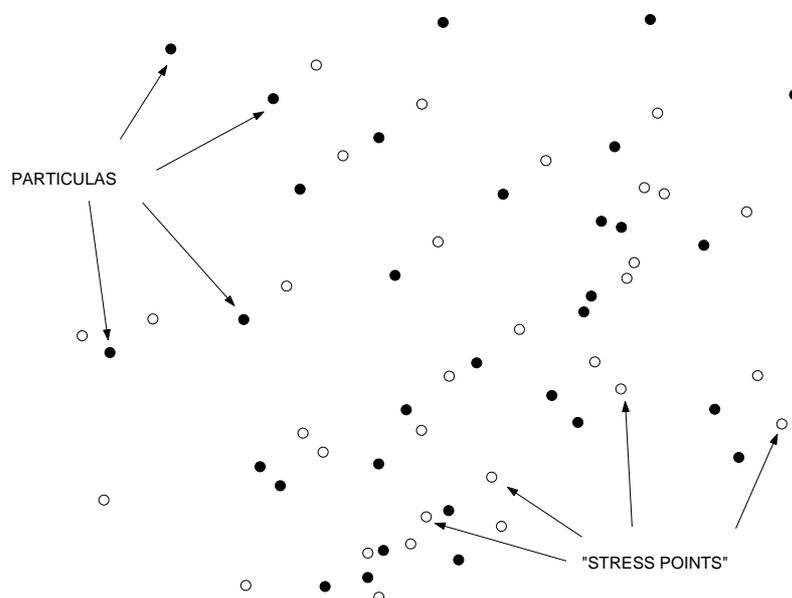


Figura 2. Nube de partículas y “stress-points” (doble malla).

Belytschko y sus colaboradores [22] han propuesto una implementación alternativa en la que tanto las partículas como los “stress-points” se usan como puntos de integración. Es decir, es un esquema de integración nodal “reforzado” con unos puntos de integración adicionales (Fig. 3). Así, las fuerzas internas —sin considerar tracciones en los contornos— resultan:

$$\mathbf{f}_i^{int} = - \sum_{ip=1}^n \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{ip} \nabla \mathbf{x} N_i^*(\mathbf{x}_{ip}) V_{ip}^p - \sum_{is=1}^{ns} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_{is} \nabla \mathbf{x} N_i^*(\mathbf{x}_{is}) V_{is}^s \quad (52)$$

Los pesos de integración V_{ip}^p y V_{is}^s (diferentes de los volúmenes “reales”) son tales que

$$\sum_{ip=1}^n V_{ip}^p + \sum_{is=1}^{ns} V_{is}^s = V \quad (53)$$

La determinación de estos pesos es el mayor inconveniente de este esquema en el caso de núcleos eulerianos. El diagrama de Voronoi de las partículas y de los “stress-points” deben evaluarse en cada paso de tiempo, lo que implica un considerable esfuerzo computacional. No obstante, en el caso de núcleos lagrangianos los diagramas se calculan únicamente en la configuración inicial por lo que el esquema resulta algo más eficiente.

Finalmente, proponemos otra implementación de los “stress-points” que, de alguna modo, puede interpretarse como la extensión bidimensional del algoritmo 1D de Dyka, Randles y Ingel [27] en el que un “elemento” está asociado a una partícula y las tensiones se calculan utilizando dos puntos de integración del “interior de cada elemento”. En la versión 2D, una región del dominio está asociada a cada partícula, y ciertos puntos “representativos” dentro de cada región se emplean como puntos de integración. A diferencia de la formulación en “doble malla” o “doble nube de puntos” presentada

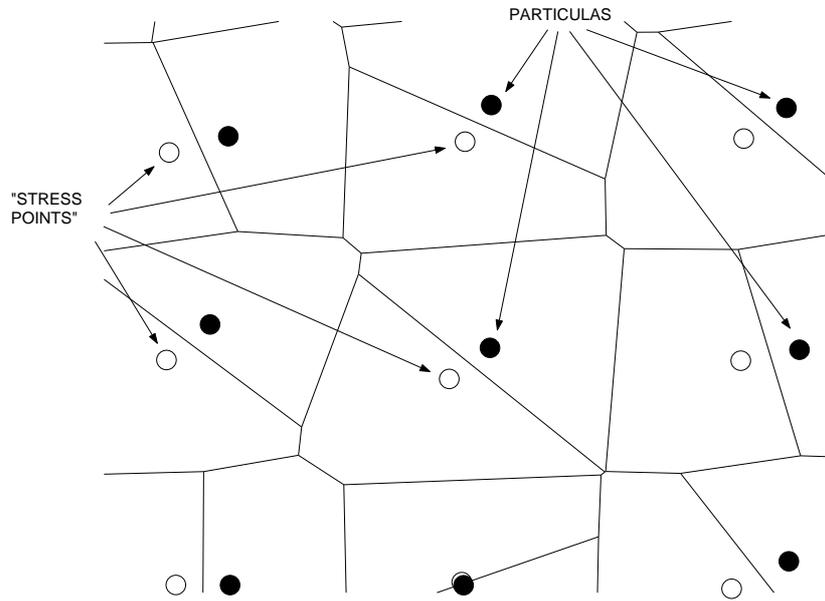


Figura 3. Partículas, “stress-points” y celdas de Voronoi.

antes, los “stress-points” están ahora *asociados* a las partículas y representan cierta porción del volumen nodal. Por otra parte, y dado que se desea evitar determinar explícitamente la región asociada a cada partícula (calculando los diagramas de Voronoi, por ejemplo), se opta por asignar una región nodal a cada partícula de modo que los “stress-points” se definen en dichas regiones (Fig.4) y los pesos de integración V_{ik}^s vienen dados por

$$\sum_{k=1}^{ns_i} V_{ik}^s = V_i \tag{54}$$

donde ns_i es el número de “stress-points” asociados a una partícula i , V_{ik}^s es el peso de integración del “stress-point” k asociado a la partícula i , y V_i es el volumen de la partícula i . Se asume que la relación V_{ik}^s/V_i permanece constante en la evolución de la simulación. Dado que generalmente las partículas se sitúan inicialmente siguiendo una retícula más o menos regular, la situación inicial de los puntos de integración (y, en consecuencia, la determinación inicial de las regiones asociadas a cada partícula) suele ser sencilla. Si a medida que avanza la simulación, los puntos de integración asociados a cada partícula se mueven con su misma velocidad, la forma de la región nodal asociada a cada partícula permanece inalterada. Este esquema puede ser inadecuado si hay grandes distorsiones en el dominio, siendo más conveniente entonces desplazar los “stress-points” según (48). Con esta implementación se consigue además obtener una cierta medida de la distorsión de las regiones asociadas a las partículas a partir del movimiento de los puntos de integración (esto es, de los “stress-points”).

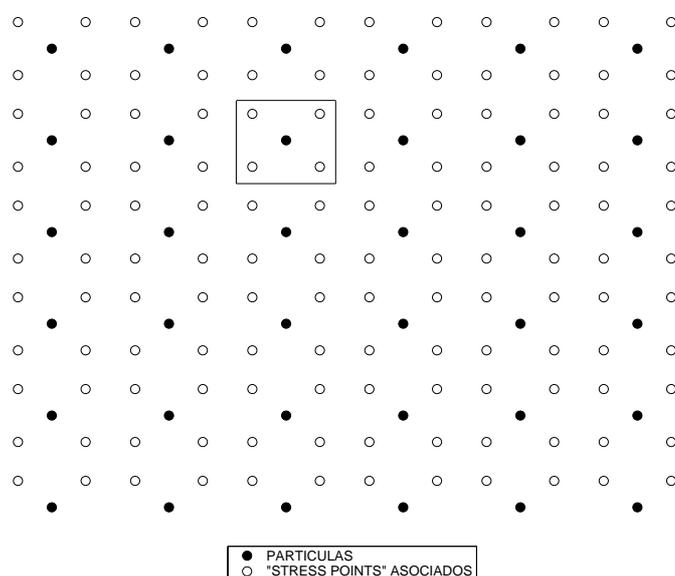


Figura 4. Partículas y “stress-points” asociados.

4.3. Matriz de masas diagonal.

Como es sabido del análisis por elementos finitos, el empleo de la matriz de masas completa en aplicaciones prácticas no suele ser eficiente por lo que se opta por emplear una matriz de masas agrupada (diagonal). Una forma sencilla de agrupamiento consiste en asignar como valor de cada elemento de la nueva matriz diagonal el de la suma de los elementos de su fila en la matriz de masas completa. Esto es, la masa agrupada \mathcal{M}_i asociada a la partícula i es

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i &= \sum_{j=1}^n m_{ij} = \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \rho N_i^*(\mathbf{x}) N_j(\mathbf{x}) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \rho N_i^*(\mathbf{x}) \left(\sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) \right) d\Omega = \int_{\Omega} \rho N_i^*(\mathbf{x}) d\Omega \end{aligned} \quad (55)$$

siempre que las funciones de forma sean al menos completas de orden cero. La forma discreta, sin especificar ningún esquema de integración específico, es

$$\mathcal{M}_i = \sum_{k=1}^{n_{inte}} \rho_k N_i^*(\mathbf{x}_k) \mathcal{W}_k \quad (56)$$

donde \mathcal{W}_k es el peso del punto k de la cuadratura. Obsérvese que, si las funciones de test son también completas al menos de orden cero, este agrupamiento verifica

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{M}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n_{inte}} \rho_k N_i^*(\mathbf{x}_k) \mathcal{W}_k = \sum_{k=1}^{n_{inte}} \rho_k \left(\sum_{i=1}^n N_i^*(\mathbf{x}_k) \right) \mathcal{W}_k = \sum_{k=1}^{n_{inte}} \rho_k \mathcal{W}_k = M \quad (57)$$

siendo M la masa total del cuerpo. Nótese la importancia de elegir correctamente los pesos de integración y las densidades para los puntos de integración en este esquema.

No obstante lo anterior, (56) no es una expresión habitual en la bibliografía sobre los métodos SPH. La práctica más extendida consiste en emplear las masas de las partículas “reales” como masas agrupadas “numéricas”, esto es

$$\mathcal{M}_i = M_i \quad (58)$$

verificándose, evidentemente, que

$$\sum_{i=1}^n M_i = M \quad (59)$$

5. APLICACIONES A PROBLEMAS DE DINÁMICA DE FLUIDOS.

5.1. Tensor de tensiones.

En los ejemplos que analizaremos en este trabajo asumiremos que el fluido es newtoniano compresible y los núcleos eulerianos, esto es, las derivadas y las diferentes magnitudes referidas a la configuración actual. Así, las fuerzas internas se relacionan con el tensor de tensiones de Cauchy en la forma

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{d}' \quad (60)$$

siendo p la presión, μ la viscosidad y \mathbf{d}' la parte desviadora del tensor velocidad de deformación \mathbf{d} , dado por

$$\mathbf{d}' = \mathbf{d} - \frac{1}{3}tr(\mathbf{d})\mathbf{I}, \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T) \quad (61)$$

Las versiones discretas del gradiente de velocidades $\nabla\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ y del tensor velocidad de deformación $\hat{\mathbf{d}}$ vienen dadas por

$$\nabla\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j \otimes \nabla N_j(\mathbf{x}), \quad \hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{2}(\nabla\hat{\mathbf{v}} + \nabla\hat{\mathbf{v}}^T) \quad (62)$$

Así, el gradiente de velocidades en un punto \mathbf{x} (en nuestros cálculos se tratará de las coordenadas de una partícula o de un punto de integración) se calcula a partir de los parámetros de la velocidad de las partículas $\{\mathbf{v}_j\}$. La divergencia del vector velocidad es

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = tr(\nabla\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j \cdot \nabla N_j(\mathbf{x}) \quad (63)$$

Por otra parte, emplearemos una ecuación de estado de la forma [30]:

$$p = \kappa \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right] \quad (64)$$

siendo $\gamma = 7$ y κ se elige de modo que el fluido sea casi incompresible; en los flujos gravitatorios la densidad inicial de las partículas se ajusta para obtener la presión hidrostática correcta calculada con (64) [30]:

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{\rho_0 g (H - z)}{\kappa} \right)^{1/\gamma} \quad (65)$$

donde H es la altura total y $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

5.2. Ecuaciones discretas.

A continuación presentaremos el conjunto de ecuaciones correspondiente a la discretización espacial. Tal como ya comentamos anteriormente se considera una formulación variacional con ponderación de tipo Bubnov-Galerkin por lo que las funciones de prueba y de test pertenecen al mismo espacio funcional.

- Ecuación de momento.

$$\mathcal{M}_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \mathbf{f}_i^{int} + \mathbf{f}_i^{ext} \quad (66)$$

siendo \mathcal{M}_i la masa agrupada de la partícula i y \mathbf{f}_i^{int} y \mathbf{f}_i^{ext} las fuerzas internas y externas respectivamente, dadas por:

$$\mathbf{f}_i^{int} = - \sum_{k=1}^{ninte} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_k \nabla N_i(\mathbf{x}_k) \mathcal{W}_k \quad (67)$$

$$\mathbf{f}_i^{ext} = \sum_{k=1}^{ninte} N_i(\mathbf{x}_k) \mathbf{b}_k \mathcal{W}_k + \sum_{k=1}^{ninte^B} N_i(\mathbf{x}_k) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_k \mathbf{n} \mathcal{W}_k^B \quad (68)$$

Como puede verse se ha preferido expresar la formulación en una forma general sin especificar el tipo de esquema de integración numérica, y en la que $ninte$ indica el número total de puntos de integración. Obsérvese que deben definirse los apropiados pesos de integración \mathcal{W}_k tanto para los puntos de la cuadratura en el dominio y en el contorno.

Por otra parte, el tensor de tensiones debe calcularse en cada punto de integración según

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k = -\hat{p}_k \mathbf{I} + 2\mu_k \hat{\mathbf{d}}_k \quad (69)$$

donde $\hat{\mathbf{d}}_k$ se relaciona con el tensor gradiente de velocidades como se ha indicado en (62).

- Ecuación de continuidad.

$$\frac{d\rho_i}{dt} = -\rho_i \text{div}(\mathbf{v})_i = -\rho_i \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j \cdot \nabla N_j(\mathbf{x}_i) \quad (70)$$

5.3. Consecuencias de la falta de la propiedad de interpolación nodal.

5.3.1. *Relativas al movimiento de las partículas.* En anteriores secciones se ha presentado la aproximación “sin malla” $\hat{u}(\mathbf{x})$ de una función $u(\mathbf{x})$ en términos de unas funciones de forma según

$$\hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n u_j N_j(\mathbf{x}) \quad (71)$$

donde n es el número total de partículas y $\{u_j\}$ es el conjunto de parámetros nodales. En esta misma línea, la velocidad interpolada en un punto dado \mathbf{x} se obtiene a partir de la información de las partículas “vecinas” mediante

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j N_j(\mathbf{x}) \quad (72)$$

A diferencia de las funciones de forma interpolantes de elementos finitos, las funciones de mínimos cuadrados móviles y las funciones de forma del método SPH estándar no verifican la propiedad de interpolación nodal, esto es,

$$N_j(\mathbf{x}_i) \neq \delta_{ij} \quad (73)$$

Así, en general,

$$\hat{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j N_j(\mathbf{x}_i) \neq \mathbf{v}_i \quad (74)$$

y los parámetros nodales no coinciden necesariamente con los valores interpolados. En nuestra opinión, este hecho ha introducido cierta confusión en muchas formulaciones del método SPH porque ha sido ignorado. Con el fin de deducir un algoritmo consistente, las ecuaciones discretas deben ser manipuladas correctamente ya que dichas ecuaciones no tienen un sentido tan claro y directo como las ecuaciones discretas obtenidas de funciones de forma que satisfacen la propiedad de interpolación nodal. Las ecuaciones discretas de continuidad y momento dependen de velocidades, gradientes de velocidades y aceleraciones que se calculan usando parámetros de velocidad nodales $\{\mathbf{v}_j\}$, y *no* las velocidades nodales (interpoladas) “reales” $\{\hat{\mathbf{v}}_j\}$. No obstante, antes de mover las partículas, deben calcularse tales velocidades *interpoladas*

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j N_j(\mathbf{x}_i) \quad (75)$$

y hacer uso de $\{\hat{\mathbf{v}}_j\}$ para mover las partículas según

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \hat{\mathbf{v}} \quad (76)$$

Es conveniente en este punto insistir en que mover las partículas con $\{\hat{\mathbf{v}}_j\}$ no es ninguna corrección, sino que es el esquema correcto, consistente con la aproximación “sin malla” usada. En la bibliografía sobre SPH es frecuente el empleo de versiones que de algún modo son modificaciones de esta formulación, por ejemplo la llamada corrección XSPH de Monaghan [30]. Con el fin de ilustrar este

aspecto considérense las funciones de forma de mínimos cuadrados móviles $\{N_j(\mathbf{x})\}$: Tras calcular los parámetros nodales $\{\mathbf{v}_j\}$, se mueve la partícula i con velocidad

$$\widehat{\mathbf{v}}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j N_j(\mathbf{x}_i) = \mathbf{v}_i N_i(\mathbf{x}_i) + \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_j N_j(\mathbf{x}_i) \quad (77)$$

Dado que incluso las funciones de forma de mínimos cuadrados móviles construidas con polinomios constantes forman una partición de la unidad, la anterior expresión se puede escribir como

$$\widehat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i \left(1 - \sum_{j \neq i} N_j(\mathbf{x}_i)\right) + \sum_{j \neq i} \mathbf{v}_j N_j(\mathbf{x}_i) \quad (78)$$

que, reordenando los términos, conduce a

$$\widehat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i + \sum_{j \neq i} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) N_j(\mathbf{x}_i) = \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^n (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) N_j(\mathbf{x}_i) \quad (79)$$

Consideremos a continuación las funciones de forma del método SPH, dadas por $N_j(\mathbf{x}) = \frac{m_j}{\rho_j} W_j(\mathbf{x})$. La deducción anterior es incorrecta para estas funciones por cuanto no forman una partición de la unidad,

$$\sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} W_j(\mathbf{x}) \neq 1 \quad (80)$$

Si expresamos $N_i(\mathbf{x})$ como

$$N_i(\mathbf{x}) = \frac{m_i}{\rho_i} W_i(\mathbf{x}) = 1 - \alpha \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\rho_j} W_j(\mathbf{x}) \quad (81)$$

donde α es un determinado parámetro que puede depender de la disposición de las partículas, del núcleo empleado, etc., e introducimos esta expresión en (77) y reordenamos, se obtiene

$$\widehat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i + \alpha \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) W_j(\mathbf{x}_i) + (1 - \alpha) \sum_{j \neq i} \frac{m_j}{\rho_j} \mathbf{v}_j W_j(\mathbf{x}_i) \quad (82)$$

Una versión simplificada de (82) es

$$\widehat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i + \epsilon \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) W_j(\mathbf{x}_i) \quad (83)$$

donde ϵ es otro parámetro (desconocido). Esta expresión es absolutamente análoga a la que se propone en la corrección XSPH definida como [30]

$$\widehat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{v}_i + \epsilon \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{\rho_{ij}} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) W_j(\mathbf{x}_i) \quad (84)$$

siendo $\rho_{ij} = 0,5(\rho_i + \rho_j)$. En nuestra opinión, esta “corrección” es en realidad una versión *heurística* de la forma consistente (75). Sin embargo, en la corrección XSPH la ecuación de continuidad se resuelve

usando los valores de las velocidades corregidas según (84), que no es un procedimiento consistente con nuestra formulación por cuanto la ecuación de continuidad se plantea en términos de $\{\mathbf{v}_j\}$.

En la práctica, los parámetros de las velocidades nodales se emplean para resolver las ecuaciones discretas y las velocidades nodales interpoladas se emplean para mover las partículas. Queremos remarcar que esta formulación no es suavizado ni es una corrección de las velocidades, sino que se trata del procedimiento consistente con un esquema de aproximación que no verifica la propiedad de interpolación nodal. Nótese finalmente que la ecuación de continuidad se plantea en función de las densidades “reales” y, por consiguiente, las densidades que se obtienen pueden introducirse directamente en la ecuación de estado para calcular las presiones.

5.3.2. Relativas a la imposición de las condiciones de contorno esenciales. La verificación de las condiciones de contorno constituye uno de los aspectos más importantes y problemáticos de los métodos SPH dado que no pueden ser impuestas de un modo tan directo y claro como en las formulaciones basadas en el método de elementos finitos.

En el caso de las condiciones de contorno naturales, éstas están incluidas en la forma débil a través del término de tracciones en el contorno. En este caso, la principal dificultad se “reduce” a la determinación de las partículas que constituyen el contorno y sus pesos de integración. En este trabajo, las tracciones en el contorno se corresponden a contornos de superficie libre y en consecuencia las integrales sobre los contornos naturales se anulan (no se consideran los efectos de tensión superficial). Desafortunadamente las funciones de test no se anulan en los contornos esenciales, por lo que la forma débil del problema contiene un término que incluye tracciones en contornos con condiciones esenciales. Las fuerzas externas en la ecuación de momento de una partícula de fluido i son

$$\mathbf{f}_i^{ext} = \int_{\Omega} N_i^*(\mathbf{x}) \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_u} N_i^*(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} d\Gamma_u \quad (85)$$

y su versión discreta, en el caso de integración nodal, es

$$\mathbf{f}_i^{ext} = \sum_{j=1}^n N_i^*(\mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j V_j + \sum_{j \in \mathcal{B}} N_i^*(\mathbf{x}_j) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j \mathbf{n} A_j \quad (86)$$

donde \mathcal{B} es el conjunto de partículas del fluido en los contornos con condiciones esenciales (esto es, localizadas suficientemente próximas al contorno. Como se puede observar, el segundo sumando en (86) involucra a las “vecinas” a la partícula i pertenecientes a \mathcal{B} .

Por otra parte, dado que las funciones de forma de mínimos cuadrados móviles no satisfacen la propiedad de interpolación nodal, las velocidades no se pueden imponer directamente. En la bibliografía sobre el método SPH las condiciones de contorno esenciales han sido tratadas como contacto fluido-estructura y se han propuesto y usado ampliamente técnicas específicas tales como “partículas imagen” y “fuerzas del contorno” [14]. En las formulaciones clásicas de fuerzas del contorno, ciertas fuerzas actúan sobre aquellas partículas próximas al mismo (las del conjunto \mathcal{B}). El contacto con los contornos sólidos se detecta por la distancia entre las partículas del fluido y ciertas *partículas del contorno* que permanecen fijas en el contorno de la estructura y no están incluidas en los cálculos generales. Considérese, por ejemplo, una partícula del fluido $i \in \mathcal{B}$. El vector de fuerzas externas para dicha partícula es

$$\mathbf{f}_i^{ext} = \sum_{j=1}^n N_i^*(\mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j V_j + \sum_{j \in \mathcal{B}} N_i^*(\mathbf{x}_j) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j \mathbf{n} A_j + \sum_{j \in \mathcal{S}} \mathcal{F}_i^j \quad (87)$$

donde \mathcal{S} es el conjunto de las partículas del contorno sólidas y \mathcal{F}_i^j es la fuerza del contorno ejercida por la partícula j sobre i (que depende de la distancia entre i y j , sus velocidades relativas, etc.). En la mayoría de las formulaciones del método SPH, se obvia el segundo sumando del término de la derecha de (87), correspondiente a las tracciones en los contornos esenciales, de modo que resulta

$$\mathbf{f}_i^{ext} = \sum_{j=1}^n N_i^*(\mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j V_j + \sum_{j \in \mathcal{S}} \mathcal{F}_i^j \quad (88)$$

mientras que para las partículas interiores ($i \notin \mathcal{B}$),

$$\mathbf{f}_i^{ext} = \sum_{j=1}^n N_i^*(\mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j V_j \quad (89)$$

Esta técnica puede ser reformulada planteando una técnica de penalización similar a las empleadas en las formulaciones “sin malla” implícitas [9]. Así, las condiciones de contorno esenciales se imponen mediante la definición de un potencial de penalización Π^{bp} definido en el contorno:

$$\Pi^{bp} = \frac{\eta}{2} \int_{\Gamma_u} (\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^B)^2 d\Gamma_u \quad (90)$$

donde η es un parámetro de penalización (generalmente de valor elevado) y \mathbf{v}^B es la velocidad prescrita en el contorno Γ_u . Así, la primera variación de (90) es

$$\delta \Pi^{bp} = \eta \int_{\Gamma_u} \delta \hat{\mathbf{v}} \cdot (\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}^B) d\Gamma_u \quad (91)$$

expresión que puede añadirse a la forma variacional de Galerkin (28). Haciendo uso de integración nodal, se obtiene la siguiente expresión para la fuerza \mathbf{f}_i^{bp} sobre la partícula i debido al potencial de contorno definido en (90):

$$\mathbf{f}_i^{bp} = \eta \sum_{j \in \mathcal{B}} (\hat{\mathbf{v}}_j - \mathbf{v}_j^B) N_i^*(\mathbf{x}_j) A_j \quad (92)$$

Por otra parte, la expresión

$$\mathcal{F}_j = \eta (\hat{\mathbf{v}}_j - \mathbf{v}_j^B) A_j \quad (93)$$

se puede interpretar como una *fuerza debida a la proximidad de la partícula j al contorno* (es decir, debida a que $j \in \mathcal{B}$), y consecuentemente la expresión (92) se puede reescribir en la forma

$$\mathbf{f}_i^{bp} = \sum_{j \in \mathcal{B}} \mathcal{F}_j N_i^*(\mathbf{x}_j) \quad (94)$$

Esta expresión sugiere una implementación nueva de la formulación de fuerzas de contorno para contornos sólidos. Así, las “fuerzas” \mathcal{F}_j se calculan de modo similar al expuesto anteriormente para el esquema clásico de fuerzas del contorno como

$$\mathcal{F}_j = \sum_{k \in \mathcal{S}} \mathcal{F}_j^k \quad (95)$$

en la que se puede establecer una dependencia general para \mathcal{F}_j^k en la forma

$$\mathcal{F}_j^k = \mathcal{F}_j^k(\Delta \mathbf{v}_{jk}, \Delta \mathbf{x}_{jk}) \quad (96)$$

siendo $\Delta \mathbf{v}_{jk} = \hat{\mathbf{v}}_j - \mathbf{v}_k^B$ y $\Delta \mathbf{x}_{jk} = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k$, y donde \mathbf{v}_k^B es la velocidad prescrita para la partícula del contorno k .

Finalmente, si se emplean (94) y (95), el vector de fuerzas externas para una partícula dada i es

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^{ext} &= \sum_{j=1}^n N_i^*(\mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j V_j + \sum_{j \in \mathcal{B}} N_i^*(\mathbf{x}_j) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j \mathbf{n}_{A_j} + \sum_{j \in \mathcal{B}} N_i^*(\mathbf{x}_j) \mathcal{F}_j = \\ &= \sum_{j=1}^n N_i^*(\mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j V_j + \sum_{j \in \mathcal{B}} (\mathcal{F}_j + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j \mathbf{n}_{A_j}) N_i^*(\mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (97)$$

en la que como puede observarse, las fuerzas del contorno no se ejercen únicamente sobre las partículas próximas al contorno, sino también sobre sus vecinas. Además se han incorporado a la formulación los términos correspondientes a la integral sobre contornos con condiciones esenciales. Por otra parte, dado que las fuerzas de penalización \mathcal{F}_j son mucho mayores que los términos $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_j \mathbf{n}_{A_j}$, la expresión anterior se puede aproximar en la forma

$$\mathbf{f}_i^{ext} = \sum_{j=1}^n N_i^*(\mathbf{x}_j) \mathbf{b}_j V_j + \sum_{j \in \mathcal{B}} \mathcal{F}_j N_i^*(\mathbf{x}_j) \quad (98)$$

5.3.3. Relativas a la inicialización de las variables. Otro aspecto sobre el que debemos incidir especialmente es en la inicialización de las variables, en particular la distribución inicial de velocidades en términos de las velocidades nodales $\{\hat{\mathbf{v}}_j^0\}$. De nuevo, en los cálculos se precisan los *parámetros* de velocidad nodal $\{\mathbf{v}_j^0\}$ tales que

$$\hat{\mathbf{v}}_i^0 = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j^0 N_j(\mathbf{x}_i) \quad (99)$$

por lo que se debe resolver un sistema de ecuaciones lineales para obtener los valores de $\{\mathbf{v}_j^0\}$.

En algunos casos particulares, el hecho de que las funciones de forma de mínimos cuadrados móviles con bases lineales reproduzcan completamente cualquier función lineal simplifica la aplicación de las condiciones iniciales. Sea, por ejemplo, un campo de velocidades iniciales constantes $\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^0$. Entonces, se puede elegir $\mathbf{v}_j^0 = \mathbf{v}^0$, $\forall j = 1, \dots, n$ ya que

$$\hat{\mathbf{v}}^0(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j^0 N_j(\mathbf{x}_i) = \mathbf{v}^0 \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) = \mathbf{v}^0 \quad (100)$$

De un modo similar, dado un campo lineal $\mathbf{v}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x}$, donde \mathbf{C} es una matriz de constantes (de dimensión 2)

$$\hat{\mathbf{v}}^0(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{C}\mathbf{x}_j N_j(\mathbf{x}_i) = \mathbf{C} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j N_j(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (101)$$

y consecuentemente $\mathbf{v}_j^0 = \mathbf{C}\mathbf{x}_j$, $\forall j = 1, \dots, n$. Evidentemente, estas conclusiones son ciertas para funciones de mínimos cuadrados móviles con bases polinómicas lineales porque tiene consistencia de orden 1.

No obstante, incluso en el caso de las formulaciones clásicas del método SPH (cuyas funciones no tienen consistencia cero), suele ser una práctica habitual considerar $\mathbf{v}_j^0 = \hat{\mathbf{v}}_j^0$; y es posible que en la mayor parte de las formulaciones SPH se considere que $\mathbf{v}_j \equiv \hat{\mathbf{v}}_j$ en todos los cálculos. Estas hipótesis son incorrectas y causan errores importantes en las simulaciones.

5.4. Ecuaciones discretas alternativas.

En la bibliografía sobre el método SPH es frecuente calcular el gradiente de velocidades como,

$$\nabla \hat{\mathbf{v}}_i = \sum_{j=1}^n (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \otimes \nabla N_j(\mathbf{x}_i) \quad (102)$$

Si se consideran funciones de prueba de mínimos cuadrados móviles lineales, entonces,

$$\sum_{j=1}^n (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_i) \otimes \nabla N_j(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j \otimes \nabla N_j(\mathbf{x}_i) - \mathbf{v}_i \otimes \sum_{j=1}^n \nabla N_j(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^n \mathbf{v}_j \otimes \nabla N_j(\mathbf{x}_i) \quad (103)$$

por lo que (102) es equivalente a (31), salvo por errores de redondeo. A pesar de que en el caso de campos de velocidades constantes en los que con el empleo de (102) se eliminan tales errores de redondeo, no parece que tenga ventajas significativas en un problema general.

Si se emplea interpolación estándar de tipo SPH entonces (103) no se verifica, y ambas formulaciones no son equivalentes. Esta simetrización ha sido ampliamente utilizada para garantizar gradientes de velocidad correctos para campos de velocidades constantes. Sin embargo, en nuestra opinión, esto corresponde a una elección diferente de las funciones de prueba lo que debería ser considerado, por consistencia, en la formulación en todo momento en el que aparecen las funciones de prueba. Un razonamiento similar se puede aplicar para el caso de las fuerzas internas. Una expresión muy empleada en la bibliografía de los métodos SPH es, para un esquema de integración nodal:

$$\mathbf{f}_i^{int} = - \sum_{k=1}^n (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k \pm \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i) \nabla N_i^*(\mathbf{x}_k) V_k \quad (104)$$

y más frecuentemente

$$\mathbf{f}_i^{int} = - \sum_{k=1}^n (\hat{\boldsymbol{\sigma}}_k + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i) \nabla N_i^*(\mathbf{x}_k) V_k \quad (105)$$

Dado que las funciones de test del método SPH estándar verifican $\nabla N_i^*(\mathbf{x}_k) V_k = -\nabla N_k^*(\mathbf{x}_i) V_i$, el uso de (105) garantiza la conservación local del momento lineal. Y el momento angular se conservará también en ausencia de tensiones cortantes [8].

Obsérvese que, en general, empleando las aproximaciones de mínimos cuadrados móviles

$$\sum_{k=1}^n \nabla N_i^*(\mathbf{x}_k) \neq \mathbf{0} \quad (106)$$

$$\nabla N_i^*(\mathbf{x}_k)V_k \neq -\nabla N_k^*(\mathbf{x}_i)V_i \quad (107)$$

Por tanto, la expresión (105) ni es antisimétrica ni consistente con la definición de las funciones de test que proponemos en (30), y consecuentemente no se empleará para las fuerzas internas.

5.5. Integración temporal.

El esquema de integración temporal que hemos empleado en las simulaciones es un algoritmo explícito de segundo orden de tipo predictor-corrector [14]. La secuencia de actualizaciones de las velocidades, densidades y posiciones de las partículas que se realizan en cada paso es

(a) en la fase “predictora” del algoritmo (se indica con el superíndice P):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^P &= \mathbf{v}_i^k + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}_i^k \\ \rho_i^P &= \rho_i^k + \frac{\Delta t}{2} D(\mathbf{x}^k, \mathbf{v}^k) \\ \mathbf{x}_i^P &= \mathbf{x}_i^k + \frac{\Delta t}{2} \widehat{\mathbf{v}}_i^k \end{aligned} \quad (108)$$

(b) en la fase “correctora” del algoritmo (se indica con el superíndice C):

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^C &= \mathbf{v}_i^k + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{a}_i^{1k}(\mathbf{v}^P, \rho^P, \mathbf{x}^P) \\ \rho_i^C &= \rho_i^k + \frac{\Delta t}{2} D(\mathbf{x}^P, \mathbf{v}^C) \\ \mathbf{x}_i^C &= \mathbf{x}_i^k + \frac{\Delta t}{2} \widehat{\mathbf{v}}_i^C \end{aligned} \quad (109)$$

(c) y finalmente, se obtienen las variables en el paso $k + 1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^{k+1} &= 2\mathbf{v}_i^C - \mathbf{v}_i^k \\ \rho_i^{k+1} &= 2\rho_i^C - \rho_i^k \\ \mathbf{x}_i^{k+1} &= 2\mathbf{x}_i^C - \mathbf{x}_i^k \end{aligned} \quad (110)$$

En la práctica hemos considerado que $\mathbf{a}^k \approx \mathbf{a}^{2(k-1)}$ con un menor coste computacional y sin modificar el orden del método [14]. Asimismo, conviene recordar que la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) de estabilidad limita el paso de tiempo del algoritmo y que éste debe ajustarse según el soporte del dominio, la celeridad de la onda, la velocidad y el número de Courant [8, 33].

En las referencias [16, 31, 32, 33, 34] pueden encontrarse más detalles acerca de la implementación práctica de la metodología expuesta anteriormente, el algoritmo principal empleado y la aplicación de las condiciones de contorno.

6. ASPECTOS DE LA IMPLEMENTACIÓN

En esta sección se analizan algunos aspectos prácticos de la implementación de la metodología expuesta.

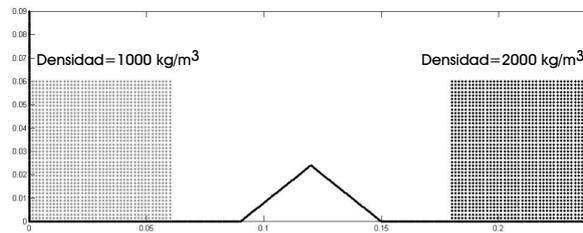


Figura 5. Ejemplo de rotura de presas: Esquema de la configuración inicial.

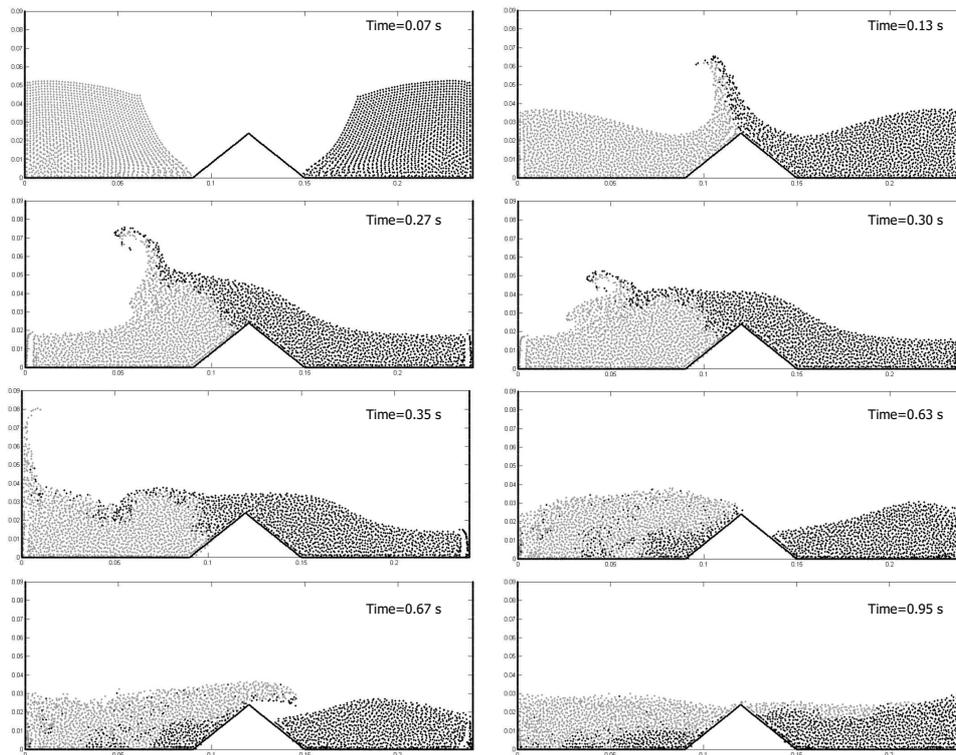


Figura 6. Ejemplo de rotura de presas: Diferentes instantes de la simulación.

Un aspecto fundamental en cualquier formulación tipo SPH consiste en la elección de un buen algoritmo para la búsqueda de las partículas que se considerarán vecinas de una dada. En este trabajo se ha empleado un algoritmo de búsqueda por celdas similar al expuesto en [14], con lo que se consigue que el tiempo de computación dedicado a la “búsqueda de vecinos” sea despreciable en comparación al tiempo de cálculo global para cada paso de tiempo.

Por otra parte, la construcción de las funciones de forma de mínimos cuadrados móviles con base lineal requiere la inversión de la matriz de momentos en (13). Esta matriz será singular no se dispone de suficientes vecinos o las partículas de la nube están alineadas (en 2D). En realidad, y aun

disponiendo de suficientes partículas no estrictamente alineadas, la matriz de momentos puede ser mal condicionada, afectando negativamente a la estabilidad del algoritmo. En la práctica hemos empleado un procedimiento similar al propuesto en [11], donde el orden de la aproximación cambia en función del número de condición de la matriz de momentos, alternando entre base lineal y base constante (funciones de Shepard)

La implementación de esta metodología se realiza en un algoritmo que incorpora un esquema de tipo “leap-frog” para la integración temporal, y cuya secuencia de tareas es la siguiente:

- Definición de la geometría inicial, conectividad de las celdas de búsqueda y variables de flujo: $\mu, \kappa, \mathbf{v}, V, \rho, M, p, c$, etc.
- En cada instante de tiempo:
 - I. Construcción de las nubes de partículas (búsqueda de vecinos).
 - II. Cálculo de las funciones de forma y sus derivadas, evaluadas en los puntos de integración, según (14).
 - III. Cálculo de los tensores de tensiones en los puntos de integración, de acuerdo con (69) y (62).
 - IV. Cálculo de las fuerzas internas y externas, según (67) y (68). Cálculo de los parámetros nodales de aceleración, \mathbf{a} .
 - V. Actualización de los parámetros nodales de velocidad, $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}^{-\frac{1}{2}} + \mathbf{a}\Delta t$.
 - VI. Cálculo de las fuerzas del contorno, \mathbf{f}^b .
 - VII. Actualización de los parámetros nodales de velocidad, $\mathbf{v}^{\frac{1}{2}} = \mathbf{v}^* + \mathbf{f}^b \Delta t$.
 - VIII. Variaciones de densidad, según (70).
 - IX. Cálculo de las velocidades nodales interpoladas $\hat{\mathbf{v}}$, utilizadas para mover las partículas según (72).
 - X. Actualización de las posiciones y otras variables.
- Fin del bucle.

Otro aspecto importante de la implementación de la formulación propuesta hace referencia a la imposición de las condiciones de contorno. En los ejemplos expuestos a continuación, las condiciones esenciales de contorno se imponen mediante el esquema de fuerzas del contorno expuesto en los apartados anteriores. Los contornos sólidos están formados por partículas que se consideran fijas en el contorno, separadas en general un tercio de la distancia inicial entre partículas del interior del dominio. Así, en cada instante de tiempo, para tener en cuenta las fuerzas del contorno es necesario llevar a cabo las siguientes tareas:

- Inicializar las fuerzas del contorno, $\mathbf{f}_i^b = \mathbf{0}$, $\forall i = 1, \dots, n$.
- Determinar el conjunto \mathcal{B} de partículas situadas “suficientemente cerca” del contorno. En la práctica, una partícula j pertenece a \mathcal{B} si existe una partícula del contorno k tal que la distancia entre j y k es menor que un valor especificado r_0 ; en este trabajo hemos empleado $r_0 = 0,7h$. Llamamos \mathcal{S}_j al conjunto de partículas del contorno k asociadas en el sentido anterior a la partícula j .
- Para cada partícula $j \in \mathcal{B}$:
 - Para cada partícula $k \in \mathcal{S}_j$:
 - Calcular la fuerza del contorno \mathcal{F}_j^k ejercida por la partícula k sobre j . La expresión empleada para las fuerzas del contorno es:

$$\mathcal{F}_j^k = f_1(\Delta \mathbf{v}_{jk}) f_2(\Delta \mathbf{x}_{jk}) \quad (111)$$

donde $\Delta \mathbf{v}_{jk}$ y $\Delta \mathbf{x}_{jk}$ se definen como (96) y

$$f_1(\Delta \mathbf{v}_{jk}) = \begin{cases} 1, & \Delta \mathbf{v}_{jk} \cdot \mathbf{n}_k < 0 \\ 0, & \Delta \mathbf{v}_{jk} \cdot \mathbf{n}_k \geq 0 \end{cases} \quad (112)$$

$$f_2(\Delta \mathbf{x}_{jk}) = \frac{A}{r} \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^4 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right) \mathbf{n}_k \quad (113)$$

donde $r = \|\Delta \mathbf{x}_{jk}\| = \|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|$, \mathbf{n}_k es la normal unitaria asociada a la partícula del contorno k y A es cierta constante. La expresión (113) es una versión modificada de las fuerzas de Lennard-Jones [30] (modificada en el sentido de que consideramos fuerzas *normales* y no *radiales*).

- Añadir $\mathcal{F}_j^k N_i^*(\mathbf{x}_j)$ a la fuerza de contorno \mathbf{f}_i^b aplicada a cada vecino i de la partícula j .

- Fin del bucle.

- Fin del bucle.

Finalmente debemos resaltar que, aunque la implementación propuesta mejora los resultados obtenidos con formulaciones clásicas de fuerzas de contorno en casos sencillos en los que se pretende simplemente impedir que el fluido atravesase el contorno [16, 31, 32, 34], la correcta imposición de condiciones de contorno más generales es todavía un problema abierto en SPH.

7. EJEMPLOS

En esta sección se presentan cuatro ejemplos de simulaciones de flujo de fluidos en distintas situaciones que han sido obtenidas con la formulación “sin malla” propuesta en este trabajo.

7.1. Ejemplo de rotura de presas.

Los problemas tipo “rotura de presa” han sido extensamente utilizados como test en la evaluación de formulaciones lagrangianas [8, 20, 30, 33, 35]. En este caso se trata de dos masas de fluidos de distintas densidades, inicialmente confinados por muros. Se estudia el flujo de fluidos cuando los muros de retención se suprimen. La situación inicial puede verse en la Figura 5. Las densidades de los fluidos es de 1000 kg/m^3 y 2000 kg/m^3 , y la viscosidad dinámica de $0,5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. La Figura 6 muestra la evolución de los fluidos para distintos instantes de tiempo.

7.2. Ejemplos de impacto fluido-fluido y de interacción fluido-estructura.

El primero de estos ejemplos corresponde a una gota de agua que cae verticalmente a 2 m/s sobre una masa de agua inicialmente en reposo (Figura 7).

Este ejemplo demuestra el excepcional buen funcionamiento de la formulación por la ausencia de distorsiones en el contorno como puede observarse en la imagen ampliada de la Figura 8. La densidad del fluido y su viscosidad dinámica son $\rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$ y $\mu = 0,5 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, respectivamente.

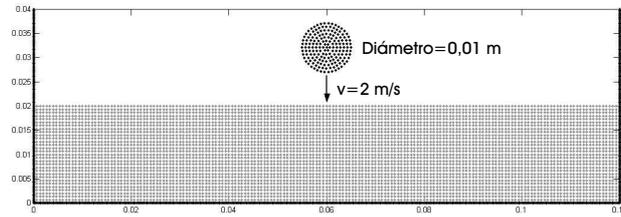


Figura 7. Ejemplo de impacto fluido-fluido: Esquema de la configuración inicial.

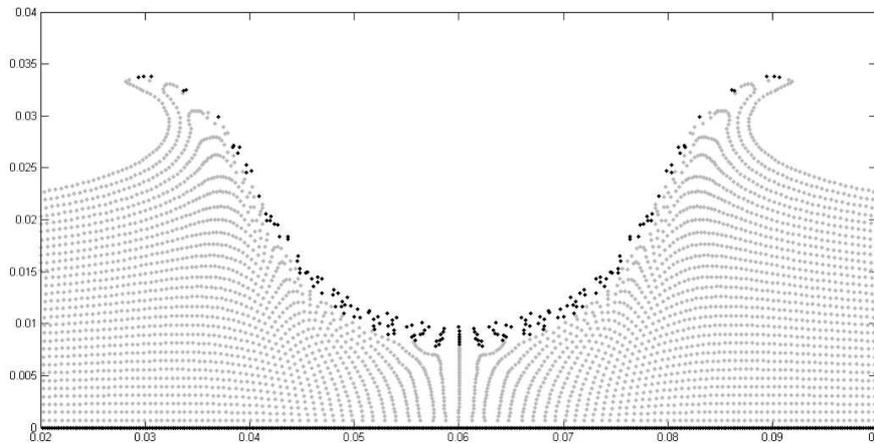


Figura 8. Ejemplo de impacto fluido-fluido: Simulación a $t = 0,0396$ s (detalle).

El número total de partículas es de 5539. En la Figura 9 se muestran las simulaciones para distintos instantes.

El segundo ejemplo corresponde a un caso de interacción fluido-estructura. Se considera una masa de fluido retenida inicialmente por una compuerta (Figura 10), y se ha simulado el flujo del fluido a medida que va ascendiendo la compuerta a una velocidad constante de $0,7 \text{ m/s}^{-1}$. En la Figura 11 se muestran los resultados para distintos instantes de tiempo.

7.3. Ejemplo de llenado de un molde.

En los ejemplos previos se ha demostrado el correcto funcionamiento del método propuesto en casos en los que los contornos tienen poca influencia. En este ejemplo demostraremos que la formulación es particularmente sensible —como ocurre con todas las metodologías basadas en el método SPH— a la correcta (o quizás mejor dicho a la *incorrecta*) aplicación de las condiciones de contorno, en lo que constituye una línea de investigación desafiante y, sin duda, abierta.

La simulación corresponde al llenado de un molde circular con un núcleo central como muestra la Figura 12. La velocidad del chorro de fluido a la entrada del molde es de 18 m/s y la viscosidad dinámica es $\mu = 0,01 \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$. El módulo volumétrico del fluido (κ) se ha elegido para que la celeridad de onda sea de 1000 m/s . El número total de partículas es 14314.

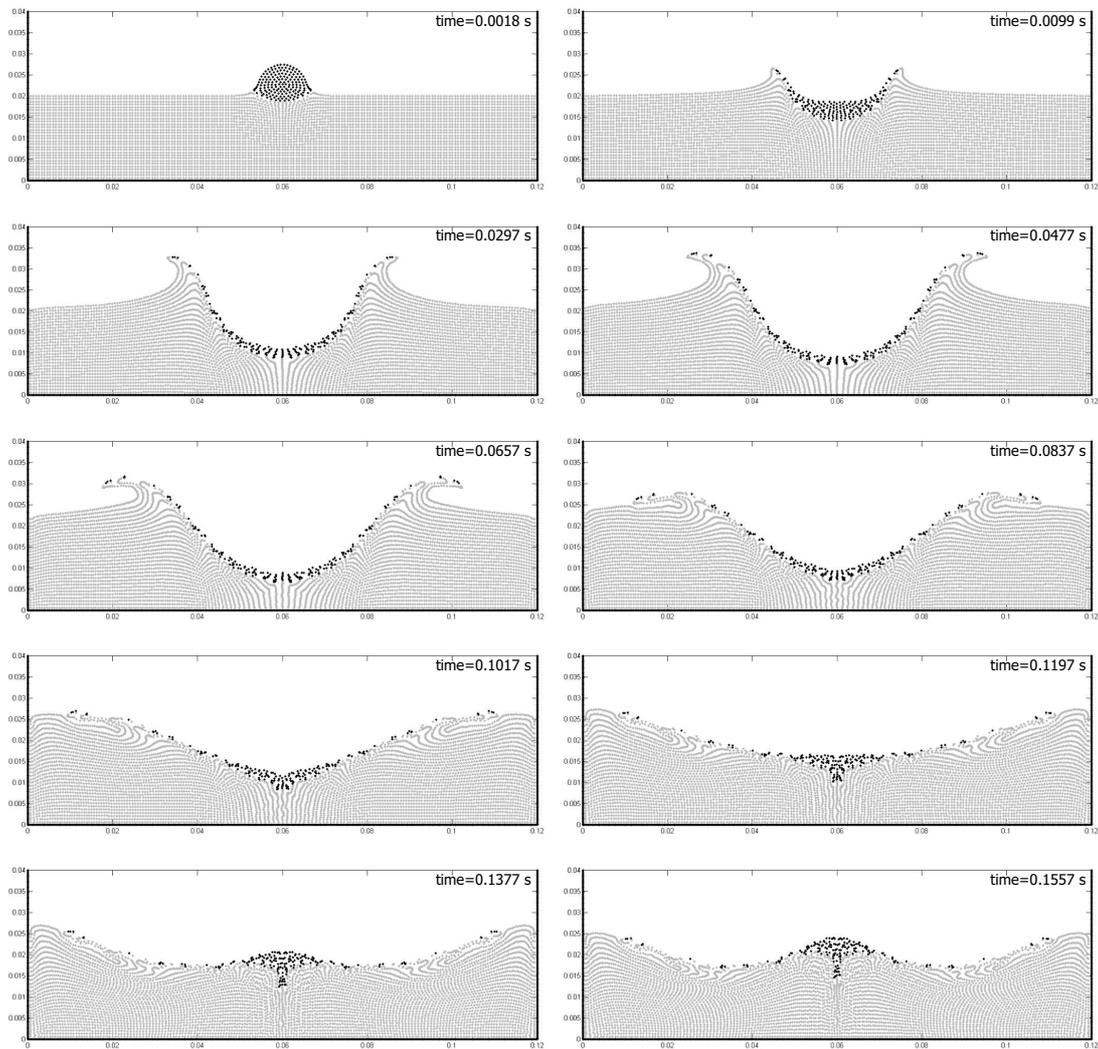


Figura 9. Ejemplo de impacto fluido-fluido: Diferentes instantes de la simulación.

En la Figura 13 se muestran diferentes instantes de la simulación (se ha adoptado como origen de tiempos el instante en que se produce el choque del chorro de fluido con el núcleo central). La forma de los dos chorros que se forman tras el choque con el núcleo central del molde parece muy satisfactoria y concuerda con resultados previos de otros autores que se dispone de este caso [36].

A pesar de emplear una formulación consistente de *fuerzas de contorno*, hemos encontrado excesiva distorsión cerca de los contornos, en comparación con el flujo en puntos alejados de su influencia (véase la Figura 14). Este efecto podría estar causado por emplear una formulación para representar el contorno de tipo “particular”, esto es, basado en partículas, y es una línea de mejora que esperamos desarrollar en breve.

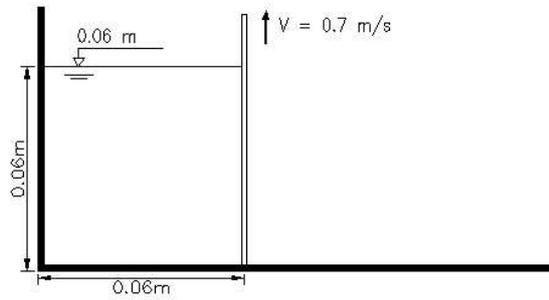


Figura 10. Ejemplo de interacción fluido-estructura: Esquema de la configuración inicial.

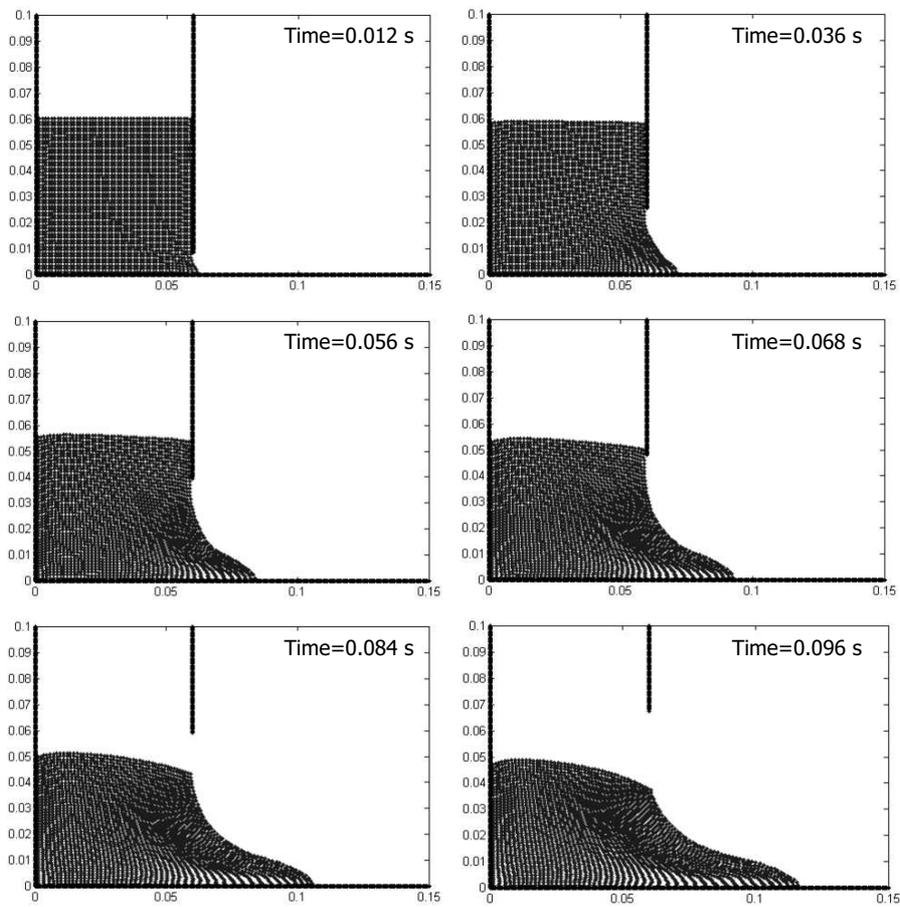


Figura 11. Ejemplo de interacción fluido-estructura: Diferentes instantes de la simulación.

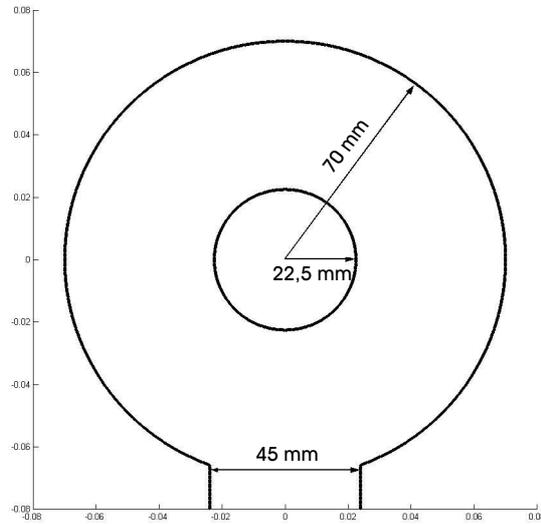


Figura 12. Ejemplo de llenado de un molde: Dimensiones del molde.

En la Figura 15 se muestra una comparación entre los resultados numéricos obtenidos con la formulación “sin malla” propuesta en este trabajo y las imágenes obtenidas experimentalmente para los mismos instantes de tiempo por Schmid and Klein [37].

8. CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE DESARROLLO

En este artículo se ha abordado el estudio de una formulación numérica de Galerkin basada en el método de partículas SPH (*Smoothed Particle Hydrodynamics*) con funciones de forma de mínimos cuadrados móviles para la simulación de problemas de flujo de fluidos con superficie libre. La formulación desarrollada constituye un marco general claro y bien fundamentado para interpretar técnicas propuestas y utilizadas tradicionalmente por los usuarios del método SPH tales como los “stress points”, fuerzas de contorno, correcciones y cálculos “especiales” de los gradientes de las funciones, etc. Asimismo constituye una metodología general a partir de la cual se pueden desarrollar algoritmos consistentes y computacionalmente más eficientes.

En el desarrollo de esta investigación se han explicado y aclarado algunas de las cuestiones y metodologías propuestas y empleadas en el ámbito del método SPH y han surgido otras. Así, entre las cuestiones no resueltas podemos incluir el desarrollo de un algoritmo eficiente para flujo de fluidos incompresibles, una adecuada formulación para la imposición de las condiciones de contorno, estimaciones del error, algoritmos eficientes para longitudes de soporte del dominio variables, esquemas de integración numérica eficientes de las formas débiles, desarrollo de formulaciones locales eficientes, etc.

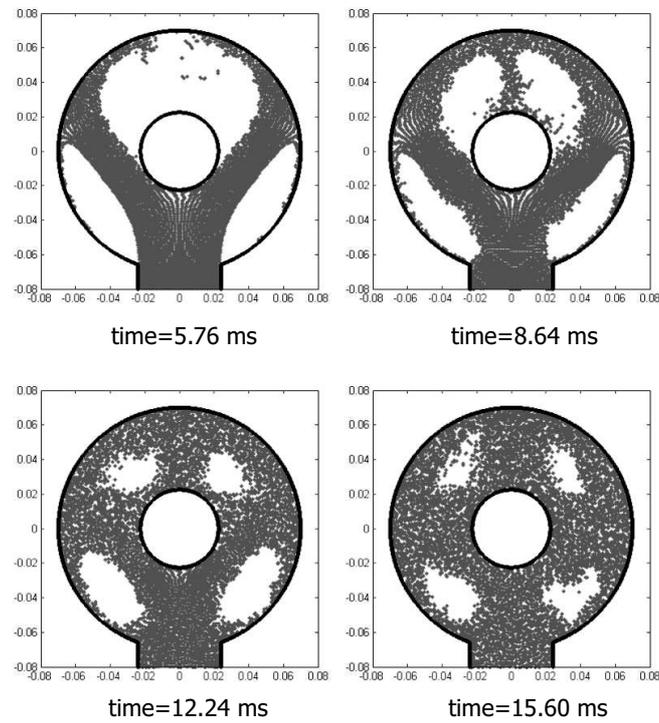


Figura 13. Ejemplo de llenado de un molde: Diferentes instantes de la simulación.

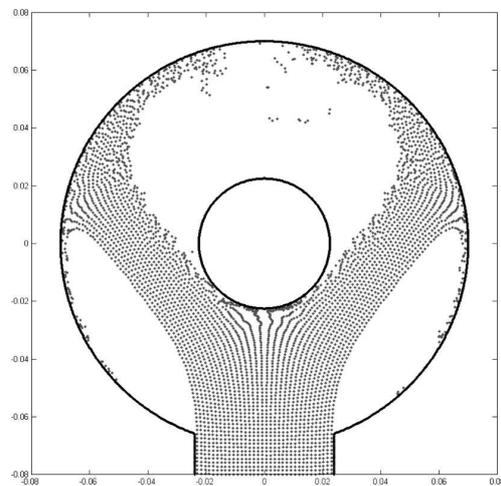


Figura 14. Ejemplo de llenado de un molde: Simulación a $t = 5,76$ ms.

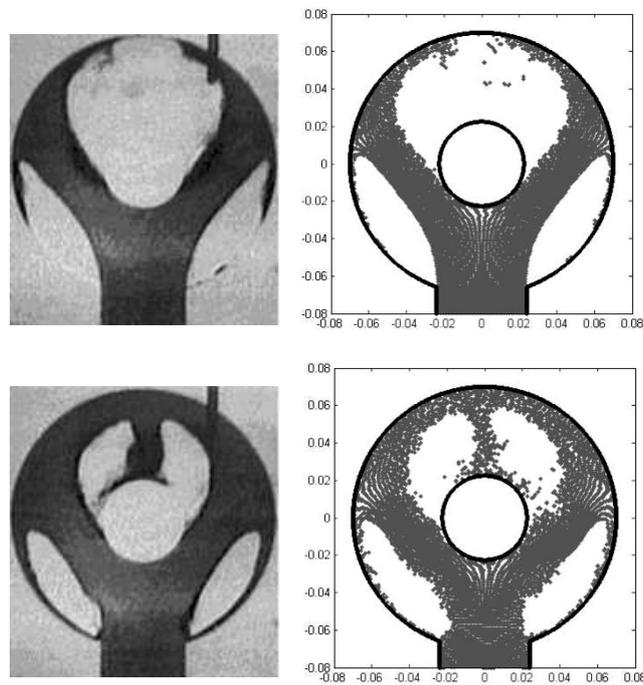


Figura 15. Ejemplo de llenado de un molde: Resultados experimentales (izquierda) y numéricos (derecha).

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la SGPIC del Ministerio de Ciencia y Tecnología (Proyecto DPI# 2001-0556), por la Xunta de Galicia (Proyectos # PGDIT01PXI11802PR y PGDIT03PXIC118002PN) y por la Universidad de La Coruña.

El Sr. Cueto-Felgueroso agradece la financiación recibida de la Fundación de la Ingeniería Civil de Galicia y del Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

REFERENCIAS

1. J.J. Monaghan. An introduction to SPH. *Computer Physics Communications*. **48**:89–96 (1988).
2. T. Belytschko, Y.Y. Lu, L. Gu. Element-Free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1994; **37**:229–256 (1994).
3. L.B. Lucy. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *Astronomical Journal*. **82**:1013 (1977).
4. R.A. Gingold, J.J. Monaghan. Smoothed Particle Hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. **181**:378 (1977).
5. L.D. Libersky, A.G. Petschek, T.C. Carney, J.R. Hipp, F.A. Allahdadi. High strain Lagrangian hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*. **109**:67–75 (1993).
6. P.W. Randles, L.D. Libersky. Smoothed Particle Hydrodynamics: Some recent improvements and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **139**:375–408 (1996).
7. G.R. Johnson, S.R. Beissel. Normalized Smoothing Functions for SPH impact computations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. **39**:2725–2741 (1996).
8. J. Bonet, T-S.L. Lok. Variational and momentum preserving aspects of smooth particle hydrodynamics (SPH) formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **180**:97–115 (1999).

9. J. Bonet, S. Kulasegaram. Correction and stabilization of smoothed particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. **47**:1189–1214 (2000).
10. J.K. Chen, J.E. Beraun. A generalized smoothed particle hydrodynamics method for nonlinear dynamic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **190**:225–239 (2000).
11. G.A. Dilts. Moving-Least-Squares-Particle Hydrodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Part I **44**: 1115-1155 (1999), Part II **48**: 1503 (2000).
12. W.K. Liu, S. Li, T. Belytschko. Moving least-square reproducing kernel methods: (I) Methodology and Convergence. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **143**:113–154 (1997).
13. C.A. Duarte. The hp cloud method. PhD Thesis. University of Texas at Austin, (1996).
14. J.P. Morris. An Overview of the Method of Smoothed Particle Hydrodynamics. Universitat Kaiserslautern. Internal Report (1995).
15. T. Belytschko, Y. Krongauz, J. Dolbow, C. Gerlach. On the completeness of meshfree particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **43**:785–819 (1998).
16. L. Cueto-Felgueroso. A unified analysis of meshless methods: formulation and applications. Technical Report (in Spanish), Universidad de La Coruña, (2002).
17. J. Bonet, R.D. Wood. Non-linear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis. Cambridge University Press: Cambridge, UK, (1997).
18. M.E. Gurtin. An introduction to continuum mechanics. Academic Press, Inc., (1981).
19. J. Bonet, S. Kulasegaram. Remarks on tension instability of Eulerian and Lagrangian corrected smooth particle hydrodynamics (CSPH) methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. **52**:1203–1220 (2001).
20. J. Sung, H.G. Choi, J.Y. Yoo. Time-accurate computation of unsteady free surface flows using an ALE-segregated equal-order FEM *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190**:1425–1440 (2000).
21. J. Donea, A. Huerta. Finite Element methods for flow problems. John Wiley & Sons, Ltd. (2003).
22. T. Belytschko, Y. Guo, W.K. Liu, S.P. Xiao. A unified stability analysis of meshless particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. **48**:1359–1400 (2000).
23. S. Beissel, T. Belytschko. Nodal integration of the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **139**:49–74 (1996).
24. J. Dolbow, T. Belytschko. Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods. *Computational Mechanics*. **23**:219–230 (1999).
25. J-S. Chen, C-T. Wu, S. Yoon, Y. You. A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. **50**:435–466 (2001).
26. T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming, P. Krysl. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **139**:3–47 (1996).
27. C.T. Dyka, P.W. Randles, R.P. Ingel. An approach for tension instability in Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH). *Computers and Structures*. **57**:573–580 (1995).
28. J.W. Swegle, D.L. Hicks, S.W. Attaway. Smoothed Particle Hydrodynamics Stability Analysis. *Journal of Computational Physics*. **116**:123–134 (1995).
29. R. Vignjevic, J. Campbell, L.D. Libersky. A treatment of zero-energy modes in the smoothed particle hydrodynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **184**:67–85 (2000).
30. J.J. Monaghan. Simulating Free Surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*. **110**:399–406 (1994).
31. L. Cueto-Felgueroso, G. Mosqueira, I. Colominas, F. Navarrina, M. Casteleiro. Análisis de formulaciones numéricas SPH para la resolución de problemas de flujo en superficie libre. Published in *Métodos Numéricos en Ingeniería V*, J.M. Goicolea, C. Mota Soares, M. Pastor, G. Bugeda (Eds.). Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería SEMNI, Barcelona, (2002).
32. G. Mosqueira, L. Cueto-Felgueroso, I. Colominas, F. Navarrina, M. Casteleiro. SPH approaches for free surface flows in engineering applications. Published in *Fifth World Congress on Computational Mechanics, WCCM V*. Mang H.A., Rammerstorfer F.G., Eberhardsteiner J. (Eds.). Vienna University of Technology, Austria, <http://wccm.tuwien.ac.at>, (2002).
33. L. Cueto-Felgueroso, I. Colominas, G. Mosqueira, F. Navarrina, M. Casteleiro. On the Galerkin formulation of the Smoothed Particle Hydrodynamics method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. **60**:1475–1512 (2004).
34. L. Cueto-Felgueroso, I. Colominas, G. Mosqueira, F. Navarrina, M. Casteleiro. An MLSPH algorithm for free surface flows in engineering applications. Published in *Computational Fluid and Solid Mechanics 2003*, 873–876, K.J. Bathe (Ed.), Elsevier, Oxford, UK. (2003).
35. S.R. Idelsohn, M. Storti, E. Oñate. Lagrangian formulations to solve free surface incompressible inviscid fluid flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **191**:583–593 (2001).
36. P. Cleary, J. Ha, V. Alguine, T. Nguyen. Flow modelling in casting processes. *Applied Mathematics and Modelling*. **26**:171–190 (2002).
37. M. Schmid, F. Klein. Fluid flow in die cavities - experimental and numerical simulation, NADCA 18. *International Die Casting Congress and Exposition*. Indianapolis (1995).