

Preprint of the paper

**"Análisis de formulaciones numéricas SPH para la resolución de problemas de flujo con superficie libre"**

L. Cueto-Felgueroso, G. Mosqueira, I. Colominas, F. Navarrina, M. Casteleiro (2002)  
Proceedings del "V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería" (en CD-ROM).  
Madrid, España.

## ANÁLISIS DE FORMULACIONES NUMÉRICAS SPH PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE FLUJO CON SUPERFICIE LIBRE

L. Cueto-Felgueroso, \* G. Mosqueira \*, I. Colominas \*, F. Navarrina\* y M. Casteleiro \*

\* Grupo de Métodos Numéricos en Ingeniería,  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos,  
Universidade de A Coruña,  
Campus de Elviña, 15192 A Coruña, España  
e-mail: mosqueira@iccp.udc.es, web: <http://caminos.udc.es/gmni>

**Palabras clave:** Smooth Particle Hydrodynamics, Meshless, Flujo en superficie libre.

**Resumen.** *El objetivo de este artículo es estudiar las distintas formulaciones tipo Smooth Particle Hydrodynamics (SPH) propuestas para aplicaciones a problemas de fluidos, especialmente los relacionados con flujo en superficie libre. En este trabajo nos centramos fundamentalmente en el análisis de las distintas correcciones añadidas al método para aumentar su precisión y mejorar su funcionamiento numérico y analizamos los resultados obtenidos tanto en problemas sencillos, con solución analítica, como en otros más complejos relacionados con el flujo de fluidos.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Existen en la bibliografía gran cantidad de problemas relacionados con grandes deformaciones, geometrías complicadas, propagación de grietas, etc., cuya resolución empleando las técnicas numéricas clásicas, (elementos finitos, diferencias finitas, etc.), exige unos costes computacionales muy elevados para conseguir unos resultados, en ocasiones, no muy precisos.

Por este motivo, en los últimos años se han propuesto distintos métodos que permiten resolver con bastante efectividad estos problemas. Son los “métodos sin malla”. Su principal ventaja frente a las técnicas numéricas convencionales es evitar la rígida conectividad que exigen éstas, sustituyendo los elementos que caracterizan las mallas por subdominios asociados a cada uno de los puntos en que se discretiza el dominio.

De entre todos ellos, el primer método propuesto fue el SPH (Smooth Particle Hydrodynamics) [1]. Sus orígenes se remontan a finales de los años 70 y sus primeras aplicaciones están relacionadas con problemas de astrofísica. En los últimos años, debido a su gran versatilidad y a su buen comportamiento numérico, su aplicación se ha extendido a otros campos en el ámbito de la ingeniería como el electromagnetismo o la mecánica de fluidos [2].

Dentro de este último apartado, la resolución de problemas de flujo en superficie libre con el método SPH presenta grandes ventajas frente a otros métodos, fundamentalmente cuando el planteamiento es en términos de partículas [3]. En este caso, el fluido se descompone en un conjunto de puntos, cada uno de los cuales tiene una determinada masa, volumen, velocidad, densidad, y ejerce una determinada fuerza sobre los demás y sobre los contornos. El objetivo último es determinar la posición de cada una de estas partículas en un instante de tiempo para conocer así la evolución del fluido.

Además del SPH, en la última década se han desarrollado otros métodos que, a expensas de un incremento en el coste computacional, permiten garantizar aproximaciones con un determinado orden de consistencia, como por ejemplo los basados en formulaciones de mínimos cuadrados ponderados (WLS)[4]. Asimismo, tomando como base estas técnicas, se han desarrollado distintas correcciones al SPH dando lugar al método SPH corregido (CSPH), que se caracteriza por verificar determinados requisitos de consistencia [5, 6].

Los objetivos fundamentales de este artículo son dos. Por un lado, se estudian las formulaciones de tipo SPH, tanto las corregidas como las no corregidas (SPH estándar). Con este objeto se propone una formulación denominada SPH estándar-correcta, que combina ambos métodos permitiendo analizar la influencia de las características de cada uno de ellos en la calidad de los resultados obtenidos. Por otro lado, en este artículo se intenta analizar los resultados que se obtienen al aplicar el método SPH a problemas de fluidos con superficie libre, con contorno y sin él, y su capacidad para resolver problemas reales.

Para ello, seguiremos el siguiente esquema: En primer lugar, plantearemos las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido en régimen de superficie libre. Una vez establecido el sistema de ecuaciones diferenciales que tenemos que resolver, lo expresaremos en términos de una formulación de residuos ponderados y aplicaremos un esquema de colocación puntual, imponiendo que se verifique el sistema de ecuaciones en cada uno de los puntos en los que dis-

cretizamos el dominio. El último paso para poder calcular la solución del problema es sustituir la ecuación diferencial por una ecuación algebraica, que se obtiene aplicando el método SPH en el espacio y un método explícito en el tiempo. Finalmente, resolveremos dos ejemplos, uno teórico, con solución analítica, que permite analizar la precisión de las formulaciones empleadas, y otro más complejo, que hará posible inferir el comportamiento de este método al abordar problemas reales.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA FÍSICO

En este apartado plantaremos las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido para conocer la posición de todas las partículas que lo componen en un instante de tiempo  $t$ . Si consideramos fluidos compresibles, newtonianos e isentrópicos estas ecuaciones son la de conservación del momento, la que proporciona la posición de cada partícula  $\mathbf{x}$  de fluido y la ecuación de conservación de la masa:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \mathbf{T}, \quad \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (1)$$

siendo  $\rho(\mathbf{x}, t)$  la densidad del fluido y  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  su velocidad;  $\mathbf{f}$  son las fuerzas externas por unidad de masa (por ejemplo, la gravedad en problemas de superficie libre) y  $\nabla \cdot \mathbf{T}$  las fuerzas internas por unidad de volumen.  $\mathbf{T}$  es el tensor de tensiones de Cauchy, que se calcula a través de la ecuación constitutiva:

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + 2\mu \left( \mathbf{D} - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D})\mathbf{I} \right); \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t), \quad (2)$$

siendo  $\mu$  la viscosidad del fluido,  $\mathbf{I}$  el tensor identidad de segundo orden y  $p$  un campo escalar que representa la presión y cuyo valor viene determinado por la siguiente ecuación de la termodinámica:

$$\frac{p}{p_o} = (k + 1) \left( \frac{\rho}{\rho_o} \right)^\gamma - k, \quad (3)$$

en donde  $k$  y  $\gamma$  son parámetros adimensionales que varían ligeramente con la temperatura y  $p_o$  y  $\rho_o$  son los valores atmosféricos estándar [7, 8]. A partir de estos parámetros se define la velocidad del sonido como  $c = \sqrt{\gamma k / \rho}$  [3].

Este conjunto de tres ecuaciones diferenciales con tres incógnitas se puede escribir de forma vectorial del siguiente modo:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{a}); \quad \mathbf{a}^t = (\mathbf{v}, \mathbf{x}, \rho); \quad \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} \mathbf{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{T} \\ \mathbf{v} \\ -\rho \nabla \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Este sistema se verifica en un dominio  $\Omega$  que es variable con el tiempo. En los siguientes apartados analizaremos cómo realizar las aproximaciones numéricas a este sistema de ecuaciones, tanto en el espacio como en el tiempo, siendo necesario para su resolución establecer unas determinadas condiciones iniciales y de contorno.

### 3. FORMULACIÓN EN RESIDUOS PONDERADOS: COLOCACIÓN PUNTUAL

La formulación en residuos ponderados del problema representado en la ecuación (4) consiste en imponer que se anule la integral del producto de cada una de las ecuaciones multiplicadas por unas funciones de peso o de ponderación  $\omega$ . Así, una forma variacional de la ecuación (4) viene dada por la siguiente ecuación integral:

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{d\mathbf{a}}{dt} - \mathbf{F}(\mathbf{a}) \right\} \omega d\Omega = 0 \quad (5)$$

que debe satisfacerse para todas las funciones  $\omega$  de una determinada clase definidas en  $\Omega$  [10].

Para aproximar de forma numérica la formulación en residuos ponderados aplicaremos un esquema de *Colocación Puntual*, es decir, seleccionaremos  $n_c$  puntos del dominio, denominados puntos de colocación, e impondremos que la ecuación (4) se verifique en cada uno de estos puntos. Esto es equivalente a tomar como función de ponderación en (5) la delta de Dirac:  $\omega = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{i_c})$ , siendo  $\mathbf{x}$  un punto arbitrario del dominio en un instante de tiempo  $t$  y  $\mathbf{x}_{i_c}$  cada uno de los puntos de colocación. Por lo tanto, la ecuación (5) puede escribirse como:

$$\left. \frac{d\mathbf{a}}{dt} \right|_{\mathbf{x}_{i_c}} - \mathbf{F}(\mathbf{a}) \Big|_{\mathbf{x}_{i_c}} = 0; \quad i_c = 1, \dots, n_c \quad (6)$$

El siguiente paso es analizar cómo discretizar  $\mathbf{F}(\mathbf{a})$  en el espacio y cómo resolver la ecuación resultante en el tiempo. La discretización espacial se realiza empleando el método SPH. Para la ecuación en el tiempo y dependiendo del tipo de esquema temporal empleado (implícito o explícito), puede ser preciso resolver un sistema de ecuaciones. En este artículo nos ceñiremos a esquemas explícitos.

### 4. INTERPOLACIÓN FUNCIONAL: EL MÉTODO SPH

En este apartado se estudia cómo aproximar una función escalar empleando el método SPH. El planteamiento se realiza desde un punto de vista continuo. Para calcular una aproximación  $u_h(\mathbf{x})$  al valor que toma una función  $u(\mathbf{x})$  en un punto, se emplean los valores que toma esta función en un conjunto de puntos situados dentro de un determinado dominio  $\Omega$ , ponderados con la función  $K(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  [9]:

$$u(\mathbf{x}) \approx u^h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{r} \in \Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) u(\mathbf{r}) d\Omega \quad (7)$$

Esta es una aproximación “tipo Kernel”. El núcleo  $K(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  desempeña un papel fundamental, permitiendo construir aproximaciones con carácter local. Habitualmente se define de tal forma que tome el máximo valor en el punto  $\mathbf{x}$  ponderando la información aportada por los restantes puntos en función de la distancia a  $\mathbf{x}$ . Así, si la función de ponderación sólo toma valores distintos de cero en una determinada región del dominio  $\Omega$ , se consigue el deseado carácter local. Por ejemplo:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \begin{cases} H(z) \Big|_{z=|\mathbf{x}-\mathbf{r}|/h} > 0, & \text{si } \mathbf{r} \in B(\mathbf{x}); \\ 0, & \text{en cualquier otro punto.} \end{cases} \quad (8)$$

Como función  $H(z)$  normalmente se elige la función de Gauss o un spline cúbico [11].  $B(\mathbf{x})$  es el denominador soporte del punto  $\mathbf{x}$  y representa el conjunto de puntos de su entorno que contribuyen a construir la aproximación en este punto. Una posible elección de  $B(\mathbf{x})$  es:

$$B(\mathbf{x}) = \{\mathbf{r} \in \Omega / |\mathbf{r} - \mathbf{x}| \leq 2h\} \quad (9)$$

El parámetro de dilatación  $h$  que aparece en la expresión (8) es importante porque caracteriza el soporte del núcleo y, por lo tanto, es en última instancia el encargado de controlar qué zona del dominio total influye al construir la aproximación a la función en cualquier punto. En algunos problemas, esto se traduce en un mayor o menor ancho de banda. En todos los ejemplos presentados en este artículo  $h$  permanece constante, aunque podría variar para cada punto  $\mathbf{x}$  del dominio.

Además de permitir obtener aproximaciones de tipo local, la función  $K(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  permite que la formulación verifique determinados requisitos de consistencia. Estos dependen del orden del polinomio que se quiere que la aproximación represente exactamente, lo cual va a dar idea del error que se está cometiendo.

Para conseguir un orden de consistencia  $m$  podemos sustituir la función  $u(\mathbf{r})$  por su desarrollo en serie en torno al punto  $\mathbf{x}$ :

$$u(\mathbf{r}) = u(\mathbf{x}) + \frac{1}{1!} du(\mathbf{x})(\mathbf{r} - \mathbf{x}) + \frac{1}{2!} d^2 u(\mathbf{x})(\mathbf{r} - \mathbf{x}) + \dots + \frac{1}{n!} d^n u(\mathbf{x})(\mathbf{r} - \mathbf{x}) + \Theta[|\mathbf{r} - \mathbf{x}|^m], \quad (10)$$

en donde  $d^m u(\mathbf{x})(\mathbf{r} - \mathbf{x})$  es la diferencial de orden  $m$  de  $u$  en  $\mathbf{x}$ :

$$d^m u(\mathbf{x})(\mathbf{r} - \mathbf{x}) = \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n u_{i_1, \dots, i_m}^{(m)}(\mathbf{x})(r_{i_1} - x_{i_1}) \cdots (r_{i_m} - x_{i_m}) \quad (11)$$

y  $n$  la dimensión del problema.

Si a continuación sustituimos (10) en la ecuación (7), para que la aproximación tenga orden de consistencia  $m$  se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$\int_{\mathbf{r} \in \Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) d\Omega = 1; \quad (12)$$

$$\int_{\mathbf{r} \in \Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) d^q u(\mathbf{x})(\mathbf{r} - \mathbf{x}) d\Omega = 0; \quad q = 1, \dots, m \quad (13)$$

Un ejemplo de núcleo que verifica condiciones de consistencia de orden lineal ( $m = 1$ ) es el

siguiente spline cúbico:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = W(z) \Big|_{z=|\mathbf{r}-\mathbf{x}|/h} = p \begin{cases} 1 - \frac{3}{2}z^2 + \frac{3}{4}z^3 & \text{si } z \leq 1 \\ \frac{1}{4}(2-z)^3 & \text{si } 1 < z \leq 2 \\ 0 & \text{si } z > 2 \end{cases} \quad (14)$$

en donde  $p = \frac{2}{3h}$  en problemas unidimensionales,  $p = \frac{10}{7\pi h^2}$  en problemas bidimensionales y  $p = \frac{1}{\pi h^3}$  en problemas tridimensionales.

Finalmente, para construir una aproximación SPH aplicable en la práctica es necesario pasar de una formulación continua a una discreta, es decir, expresar la integral que representa la aproximación como el producto de unos pesos de integración  $V(\mathbf{r}_{i_p})$  multiplicados por el integrando evaluado en unos puntos de integración  $(\mathbf{r}_{i_p})$  [14]. Para ello dividimos el dominio total  $\Omega$  en  $n_p$  puntos nodales o partículas, de las cuales sólo algunas estarán en el soporte de cada partícula o punto  $\mathbf{x}$ . Estos puntos nodales serán los puntos de integración. Por lo tanto, desde un punto de vista discreto, la aproximación se puede escribir como:

$$u^h(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{r} \in \Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) u(\mathbf{r}) d\Omega \simeq \sum_{i_p=1}^{n_p} V(\mathbf{r}_{i_p}) K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) u(\mathbf{r}_{i_p}) = \hat{u}^h(\mathbf{x}). \quad (15)$$

El problema que surge al pasar de una formulación continua a una discreta es que las condiciones de consistencia exigidas ya no se cumplen. Este es el motivo fundamental por el que hay que aplicar múltiples correcciones para que el método SPH funcione bien. El objetivo último de todas ellas es alcanzar un determinado orden de consistencia que depende del tipo de ecuaciones que se resuelven. En este artículo analizamos dos de las más empleadas y denominadas, respectivamente, corrección del núcleo y corrección del gradiente. Para ello escribiremos la aproximación (15) del siguiente modo:

$$\hat{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i_p=1}^{n_p} V(\mathbf{r}_{i_p}) W(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) u(\mathbf{r}_{i_p}) \quad (16)$$

en donde  $W(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p})$  representa las correcciones introducidas para garantizar la consistencia.

#### 4.1. Corrección del núcleo

Bajo este epígrafe analizamos cómo debe ser  $W(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p})$  para conseguir que la aproximación discreta tenga orden de consistencia  $m$ . Las condiciones que tiene que verificar son las siguientes:

$$\sum_{i_p=1}^{n_p} V(\mathbf{r}_{i_p}) W(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) = 1; \quad (17)$$

$$\sum_{i_p=1}^{n_p} V(\mathbf{r}_{i_p}) W(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) d^j u(\mathbf{x})(\mathbf{r}_{i_p} - \mathbf{x}) = 0; \quad j = 1, \dots, m \quad (18)$$

Un ejemplo de función  $W(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p})$  que verifica los anteriores requisitos es la que se obtiene ajustando, por mínimos cuadrados, los valores nodales de la función  $u(\mathbf{x})$ , en el subdominio de cada punto  $\mathbf{x}$ , a una función polinómica de orden  $m$  [14]:

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}^t(\mathbf{x}) \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}^t \rangle_K^{-1} \mathbf{p}(\mathbf{r}) \Rightarrow K_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \mathbf{p}^t(\mathbf{x}) \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}^t \rangle_K^{-1} \mathbf{p}(\mathbf{r}) K(\mathbf{x}, \mathbf{r}), \quad (19)$$

en donde

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{z}) \Big|_{\mathbf{z}=(\mathbf{r}-\mathbf{x})/h}, \quad (20)$$

siendo  $\varphi(\mathbf{z})$  es la base de polinomios seleccionada y  $K_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  el núcleo corregido de orden  $m$ . El producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$  viene dado por la siguiente expresión:

$$\langle f, g \rangle_K = \sum_{i_p=1}^{n_p} V(\mathbf{r}_{i_p}) K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) f(\mathbf{r}_{i_p}) g(\mathbf{r}_{i_p}). \quad (21)$$

Por lo tanto, introduciendo esta corrección, la aproximación (16) a la función  $u(\mathbf{x})$  se puede escribir como:

$$\hat{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^t(\mathbf{x}) \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}^t \rangle_K^{-1} \langle \mathbf{p}, u \rangle_K, \quad (22)$$

expresión en la cual es fácil observar que si  $u(\mathbf{x})$  es una función polinómica de orden inferior o igual a  $m$ , la aproximación  $\hat{u}^h(\mathbf{x})$  coincide con  $u(\mathbf{x})$ :

$$u(\mathbf{r}) = \mathbf{p}^t(\mathbf{r}) \boldsymbol{\beta} \quad \Longrightarrow \quad \hat{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^t(\mathbf{x}) \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}^t \rangle_K^{-1} \langle \mathbf{p}, \mathbf{p}^t \rangle_K \boldsymbol{\beta} = u(\mathbf{x}). \quad (23)$$

Por otra parte, en los problemas físicos que resolvemos en este artículo será preciso aproximar gradientes de funciones. En el caso de la corrección del núcleo, esto se lleva a cabo derivando directamente la expresión (23). Así, cuando la aproximación tenga orden de consistencia  $m$ , la aproximación del gradiente tendrá orden  $m - 1$ .

## 4.2. Corrección del gradiente

Otra forma de afrontar la aproximación del gradiente es, en lugar de derivar directamente la aproximación a la función, buscar las condiciones que tiene que cumplir el gradiente para que tenga un determinado orden de consistencia, corrigiendo directamente el gradiente.

Para ello, primero hay que tener en cuenta cómo se calcula el gradiente de una función aplicando el método SPH en su forma continua. Siguiendo el mismo proceso que en (7) la aproximación a la función  $\nabla u$  es

$$\nabla u(\mathbf{x}) \approx \nabla^h u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{r} \in \Omega} K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \nabla u(\mathbf{r}) d\Omega = \quad (24)$$

$$- \int_{\mathbf{r} \in \Omega} \nabla K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) u(\mathbf{r}) d\Omega + \int_{\mathbf{r} \in \Gamma} K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) u(\mathbf{r}) d\Gamma \approx - \int_{\mathbf{r} \in \Omega} \nabla K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) u(\mathbf{r}) d\Omega \quad (25)$$

Como es habitual en los métodos SPH, en la expresión (25) se ha despreciado el término del contorno. Es decir, se está suponiendo que o el núcleo  $K(\mathbf{x}, \mathbf{r})$  o la función  $u(\mathbf{r})$  se anulan en los

contornos, aunque esto normalmente no es cierto. Esta simplificación podría explicar algunos de los problemas que presenta el SPH a la hora de aproximar gradientes de funciones [13].

Si ahora introducimos el desarrollo en serie (10), las condiciones que tiene que cumplir el gradiente de la función de ponderación para obtener una aproximación de orden  $m$  son:

$$\int_{\mathbf{r} \in \Omega} \nabla K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) d\Omega = 0; \quad (26)$$

$$- \int_{\mathbf{r} \in \Omega} \nabla K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) du(\mathbf{x})(\mathbf{r} - \mathbf{x}) d\Omega = \nabla u(\mathbf{x}); \quad (27)$$

$$\int_{\mathbf{r} \in \Omega} \nabla K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) d^q u(\mathbf{x})(\mathbf{r} - \mathbf{x}) d\Omega = 0; \quad q = 2, \dots, m \quad (28)$$

Desde un punto de vista discreto, las condiciones (28) se traducen en exigir a las funciones de corrección  $\widehat{\mathbf{W}}$  que verifiquen los siguientes requisitos:

$$\sum_{i_p=1}^{n_p} V(\mathbf{r}_{i_p}) \widehat{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) \nabla K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) = 0; \quad (29)$$

$$\sum_{i_p=1}^{n_p} V(\mathbf{r}_{i_p}) \widehat{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) \nabla K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) (\mathbf{x} - \mathbf{r}_{i_p})^t = \mathbf{I}, \quad (30)$$

$$\sum_{i_p=1}^{n_p} V(\mathbf{r}_{i_p}) \widehat{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) \nabla K(\mathbf{x}, \mathbf{r}_{i_p}) d^q u(\mathbf{x})(\mathbf{r}_{i_p} - \mathbf{x}) = 0; \quad q = 2, \dots, m \quad (31)$$

Existen múltiples elecciones para la matriz  $\widehat{\mathbf{W}}(\mathbf{x}, \mathbf{r})$ . En el caso particular en que queramos obtener una aproximación de orden 1 al gradiente, se suele aplicar la denominada “corrección mixta núcleo-gradiente” [5], que consiste en verificar la condición (29) aplicando una corrección de orden 0 al núcleo e imponer que ese núcleo corregido cumpla la ecuación (30).

Definiendo el producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  como:

$$\langle f, g \rangle_1 = \sum_{i_p=1}^{n_p} V(\mathbf{r}_{i_p}) f(\mathbf{r}_{i_p}) g(\mathbf{r}_{i_p}), \quad (32)$$

el núcleo corregido con corrección de orden cero se puede escribir del siguiente modo:

$$K_0^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \langle 1, 1 \rangle_K^{-1} K(\mathbf{x}, \mathbf{r}); \quad (33)$$

y derivando,

$$\nabla K_0^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \nabla \langle 1, 1 \rangle_K^{-1} K(\mathbf{x}, \mathbf{r}) + \langle 1, 1 \rangle_K^{-1} \nabla K(\mathbf{x}, \mathbf{r}). \quad (34)$$

Por lo tanto,

$$\widehat{\mathbf{W}} = \langle \nabla K_0^*, (\mathbf{x} - \mathbf{r})^t \rangle_1^{-1}; \quad (35)$$

y podemos definir el gradiente corregido como:

$$\nabla_1^* K_0^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \langle \nabla K_0^*, (\mathbf{x} - \mathbf{r})^t \rangle_1^{-1} \nabla K_0^*(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \quad (36)$$

y la aproximación de orden 1 al gradiente de una función  $u(\mathbf{x})$  es:

$$\nabla^h u(\mathbf{x}) = \langle \nabla_1^* K_0^*, u \rangle_1 \quad (37)$$

## 5. ESQUEMAS DE DISCRETIZACIÓN ESPACIAL

En este apartado aplicaremos las técnicas de interpolación anteriores a la resolución de la ecuación (4) mediante dos esquemas de discretización distintos.

El primero, denominado método SPH estándar, es el método SPH sin ningún tipo de corrección. Por lo tanto, no verifica ninguna condición de consistencia. Además, se considera que el fluido es no viscoso, pero se introduce una viscosidad artificial.

El segundo es el método SPH corregido. Consiste en aplicar la corrección del núcleo para aproximar funciones y la corrección mixta núcleo-gradiente para aproximar sus gradientes. Para garantizar la conservación del momento lineal y del momento angular es necesario aplicar una corrección del núcleo de orden 0 y una corrección del gradiente de orden 1. En este caso el fluido se considera viscoso.

En los tres casos se toma como peso de integración el volumen asociado a cada partícula. Es decir, si denominamos  $m_j$  a la masa de la partícula con coordenadas  $\mathbf{r}_j$ , y  $\rho_j$  a su densidad, los pesos de integración serán:  $V(\mathbf{r}_j) = m_j/\rho_j$  [3].

### 5.1. El método SPH estándar

En el método SPH estándar las ecuaciones que rigen el movimiento de un fluido se aproximan, para cada partícula  $\mathbf{x}_i$ , del siguiente modo:

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}_i)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{p(\mathbf{x}_i)}{\rho(\mathbf{x}_i)^2} + \frac{p(\mathbf{x}_j)}{\rho(\mathbf{x}_j)^2} + \mathbf{\Pi}_{i,j} \right) \nabla_{\mathbf{r}} K(\mathbf{r}_j, \mathbf{x}_i) \quad (38)$$

$$\frac{d\rho(\mathbf{x}_i)}{dt} = -\rho(\mathbf{x}_i) \sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) (\mathbf{v}(\mathbf{r}_j) - \mathbf{v}(\mathbf{x}_i))^t \cdot \nabla_{\mathbf{r}} K(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_j) \quad (39)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) \quad (40)$$

Como se puede observar, en el método estándar se considera el fluido no viscoso pero, para corregir las oscilaciones que aparecen en este caso, se añade un término  $\mathbf{\Pi}_{i,j}$  denominado viscosidad artificial. Esta viscosidad se define del siguiente modo [15]:

$$\mathbf{\Pi}_{i,j} = \begin{cases} \frac{-\alpha c_{i,j} \mu_{i,j} + \beta \mu_{i,j}^2}{\rho_{i,j}}, & \text{para } \mathbf{v}_{i,j}^t \cdot \mathbf{r}_{i,j} < 0; \\ 0, & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases} \quad (41)$$

siendo:

$$\mu_{i,j} = \frac{h\mathbf{v}_{i,j}^t \cdot \mathbf{r}_{i,j}}{\mathbf{r}_{i,j}^2 + 0,01h^2}; \quad \rho_{i,j} = \frac{1}{2}(\rho(\mathbf{x}_i) + \rho(\mathbf{r}_j)); \quad (42)$$

$$c_{i,j} = \frac{1}{2}(c_i + c_j); \quad \mathbf{v}_{i,j} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_j); \quad \mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j. \quad (43)$$

Un valor típico de  $\alpha$  es  $\alpha = 0,01$  y  $c_i$  es la velocidad del sonido en el punto  $\mathbf{x}_i$  [3]. En los problemas como los que se tratan en este trabajo se suele adoptar el valor  $\beta = 0$  [3].

Además de introducir una viscosidad artificial, el método SPH se implementa corrigiendo la velocidad que se introduce en la ecuación de la continuidad para calcular la densidad y en la ecuación que calcula la posición de cada partícula. Esta corrección consiste en suavizar los valores de las velocidades obtenidos a partir de la ecuación del momento, obteniéndose finalmente las siguientes expresiones:

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}_i)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{p(\mathbf{x}_i)}{\rho(\mathbf{x}_i)^2} + \frac{p(\mathbf{x}_j)}{\rho(\mathbf{x}_j)^2} + \mathbf{\Pi}_{i,j} \right) \nabla_{\mathbf{r}} K(\mathbf{r}_j, \mathbf{x}_i) \quad (44)$$

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x}_i) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) + \epsilon \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{\mathbf{v}_{i,j}}{\rho_{i,j}} \right) K(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_j) \quad (45)$$

$$\frac{d\rho(\mathbf{x}_i)}{dt} = -\rho(\mathbf{x}_i) \sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) (\mathbf{v}^*(\mathbf{r}_j) - \mathbf{v}^*(\mathbf{x}_i))^t \cdot \nabla_{\mathbf{r}} K(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_j) \quad (46)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}_i) \quad (47)$$

La intención de esta corrección, denominada XSPH, es conseguir un movimiento más ordenado de las partículas. En la ecuación (45) el valor habitual de  $\epsilon$  es 0,5 [3].

## 5.2. El método SPH corregido

Teniendo en cuenta las expresiones (19) y (36), las ecuaciones que rigen el movimiento de cada partícula de fluido se pueden aproximar como:

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}_i)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) - \frac{1}{\rho(\mathbf{x}_i)} \sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) \mathbf{T}(\mathbf{r}_j) \nabla_{\mathbf{1}}^* K_0^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_j); \quad (48)$$

$$\frac{d\rho(\mathbf{x}_i)}{dt} = \rho(\mathbf{x}_i) \sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) \mathbf{v}(\mathbf{r}_j)^t \cdot \nabla_{\mathbf{1}}^* K_0^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_j); \quad (49)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) \quad (50)$$

en donde,

$$\mathbf{T}(\mathbf{r}_j) = p(\mathbf{r}_j) \mathbf{I} + 2\mu \left[ \mathbf{D}(\mathbf{r}_j) - \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{D}(\mathbf{r}_j)) \mathbf{I} \right]; \quad (51)$$

$$D(\mathbf{r}_j) = \frac{(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}_j) + \nabla \mathbf{v}(\mathbf{r}_j)^t)}{2}; \nabla_{\mathbf{r}} \mathbf{v}(\mathbf{r}_j) = - \sum_{k=1}^n V(\mathbf{r}_k) \mathbf{v}(\mathbf{r}_k) \nabla_1^* K_0^*(\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_k) \quad (52)$$

### 5.3. El método SPH estándar-correctido

En este trabajo, además de los esquemas expuestos que aparecen en la bibliografía, también hemos estudiado el comportamiento del método SPH estándar sin la corrección XSPH (45) pero con el núcleo y el gradiente del núcleo corregido. Es decir, las ecuaciones que rigen esta tercera técnica son:

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}_i)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) + \sum_{j=1}^n m_j \left( \frac{p(\mathbf{x}_i)}{\rho(\mathbf{x}_i)^2} + \frac{p(\mathbf{x}_j)}{\rho(\mathbf{x}_j)^2} + \mathbf{\Pi}_{i,j} \right) \nabla_1^* K_0^*(\mathbf{r}_j, \mathbf{x}_i) \quad (53)$$

$$\frac{d\rho(\mathbf{x}_i)}{dt} = \rho(\mathbf{x}_i) \sum_{j=1}^n V(\mathbf{r}_j) \mathbf{v}(\mathbf{r}_j)^t \cdot \nabla_1^* K_0^*(\mathbf{x}_i, \mathbf{r}_j); \quad (54)$$

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}_i) \quad (55)$$

Esto permite analizar los dos aspectos siguientes: la influencia del término de viscosidad artificial en la precisión de los resultados y la importancia de que se verifiquen los requisitos de consistencia. Asimismo, en los ejemplos se podrá observar también cómo, a pesar de que la corrección XSPH ayuda a una evolución ordenada de las partículas y reduce la interpenetración de las mismas, es más efectivo el empleo de una formulación consistente, en el sentido contemplado en el Apartado 4.

## 6. APROXIMACIÓN EN EL TIEMPO

En este Apartado planteamos la discretización temporal. Existen en la bibliografía distintas alternativas, siendo las más empleadas los métodos predictor-corrector [15] o los esquemas leap-frog [5]. En este artículo nos centramos en los métodos de intervalo simple que, de forma general, permiten aproximar la ecuación (4) del siguiente modo:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta t \Phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i), \quad (56)$$

en donde la función  $\Phi(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i)$  depende del método empleado.

En este artículo proponemos una variante del método de Euler modificado que incluye una corrección de los valores obtenidos en cada paso intermedio  $\mathbf{u}_{i+1/2}$ . El objetivo final de cada paso es calcular las posiciones de cualquier partícula en un tiempo  $t_{i+1}$  conociendo los valores en el tiempo  $t_i$ . Para ello se predicen los valores en un tiempo intermedio denominado  $t_{i/2}$  y se corrigen, llamándolos ahora  $t_{i+1/2}$ . Las ecuaciones que finalmente hay que resolver en cada paso son:

$$\mathbf{v}_{i/2} = \mathbf{v}_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{i-\frac{1}{2}}; \mathbf{x}_{i/2} = \mathbf{x}_i + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_i; \rho_{i/2} = \rho_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)_i. \quad (57)$$

$$\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right)_{i/2}; \quad \mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{x}_i + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}}; \quad \rho_{i+\frac{1}{2}} = \rho_i + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{d\rho}{dt} \right)_{i+\frac{1}{2}}. \quad (58)$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = 2\mathbf{x}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{x}_i; \quad \mathbf{x}_{i+1} = 2\mathbf{v}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{v}_i; \quad \rho_{i+1} = 2\rho_{i+\frac{1}{2}} - \rho_i \quad (59)$$

Este esquema de integración temporal da lugar a una formulación explícita.

## 7. EJEMPLOS

En este apartado presentamos dos ejemplos. En el primero, de gran sencillez y en el que no intervienen condiciones de contorno, se estudia la evolución de una gota de agua bidimensional sometida a un campo de velocidades. El objetivo es comparar los tres métodos analizados, estudiando qué aspectos de las distintas formulaciones son los que más influyen en la calidad de los resultados. El segundo ejemplo se trata de un clásico problema de “rotura de presa” con un talud aguas abajo. Este caso permite analizar cómo se comporta el SPH ante un problema de grandes deformaciones.

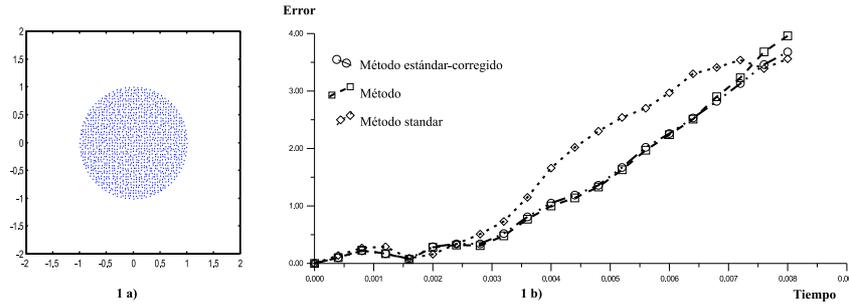


Figura 1. Configuración inicial de partículas y errores en los métodos numéricos empleados.

### 7.1. Ejemplo 1: Evolución de una gota de agua elíptica

Como primer ejemplo analizamos la evolución temporal de una gota de agua en dos dimensiones sometida a un campo inicial de velocidades lineal con las coordenadas,  $\mathbf{v}_o = (-100x, 100y)$ . La configuración inicial es un círculo de radio unidad. Nos centramos en el estudio del movimiento de los semiejes mayor  $b$  y menor  $a$ . Si consideramos el fluido incompresible, es decir  $ab = \text{cte} = 1$ , el problema se puede resolver de forma analítica [3].

En este ejemplo se analizan los resultados numéricos obtenidos para distintos tiempos con el método estándar, el corregido y el estándar-corregido. Los datos empleados son:  $\gamma = 7$ ,  $k = 285,714 \text{ MN/m}^2$  y  $\rho_o = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

En la Figura (1a) se puede observar la posición inicial de las partículas. En los tres casos se han empleado 1308 partículas distribuidas en el dominio de forma aleatoria.

En la Figura (1b) se compara el valor del producto  $ab$ , que en este ejemplo tendría que mantenerse constante e igual a 1, es decir, el fluido se comporta de forma incompresible. Además,

este producto permite estudiar la evolución conjunta de ambos semiejes. A la vista de los resultados se observa que el método estándar-correctado y el correctado se comportan de forma similar y con errores inferiores al estándar.

En la figura 2 se muestra la evolución temporal obtenida con los tres métodos. Se puede observar que con el método correctado y el estándar-correctado las partículas evolucionan de forma más regular.

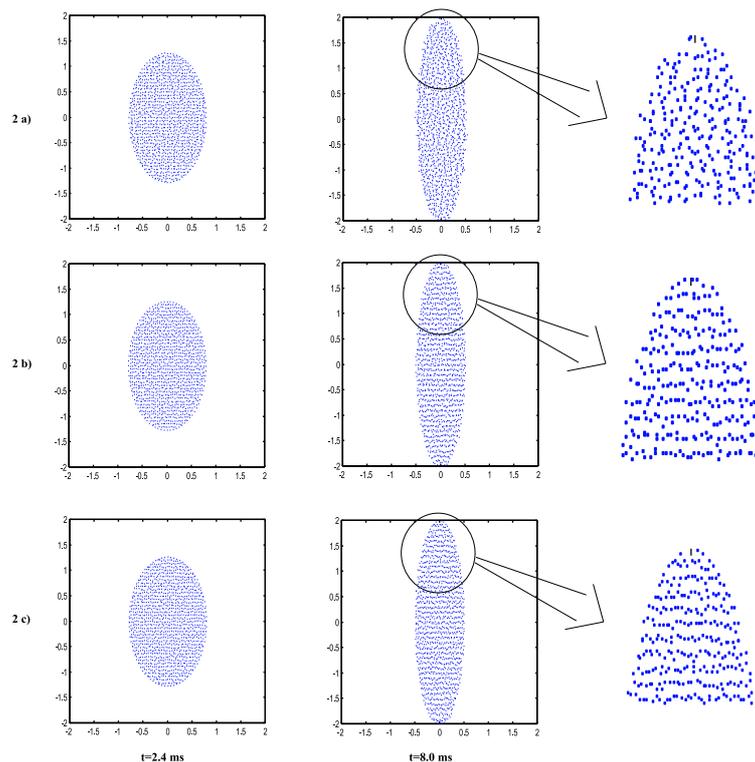


Figura 2. Evolución de las partículas con el método estándar a), el correctado b) y el estándar-correctado c) para los instantes de tiempo  $t = 2, 4 \text{ ms}$  y  $t = 8 \text{ ms}$ .

## 7.2. Ejemplo 2: Evolución de “rotura de presa” con talud aguas abajo

En este ejemplo se modeliza la evolución de las partículas de agua en un caso de “rotura de presa”. Aguas abajo de la presa se ha dispuesto un talud inclinado de tal forma que a lo largo del tiempo el agua se va deteniendo hasta quedar totalmente estancada.

Al contrario de lo que sucedía en el caso anterior, ahora sí se considera el efecto de las fuerzas externas, que se limitan a la fuerza de la gravedad. Además, el movimiento del fluido está coartado por los contornos. Existen distintas alternativas en la bibliografía para tratar contornos sólidos como los del ejemplo. En este artículo empleamos una de las técnicas más conocidas, consistente en distribuir a lo largo de los contornos una serie de partículas que ejercen sobre las

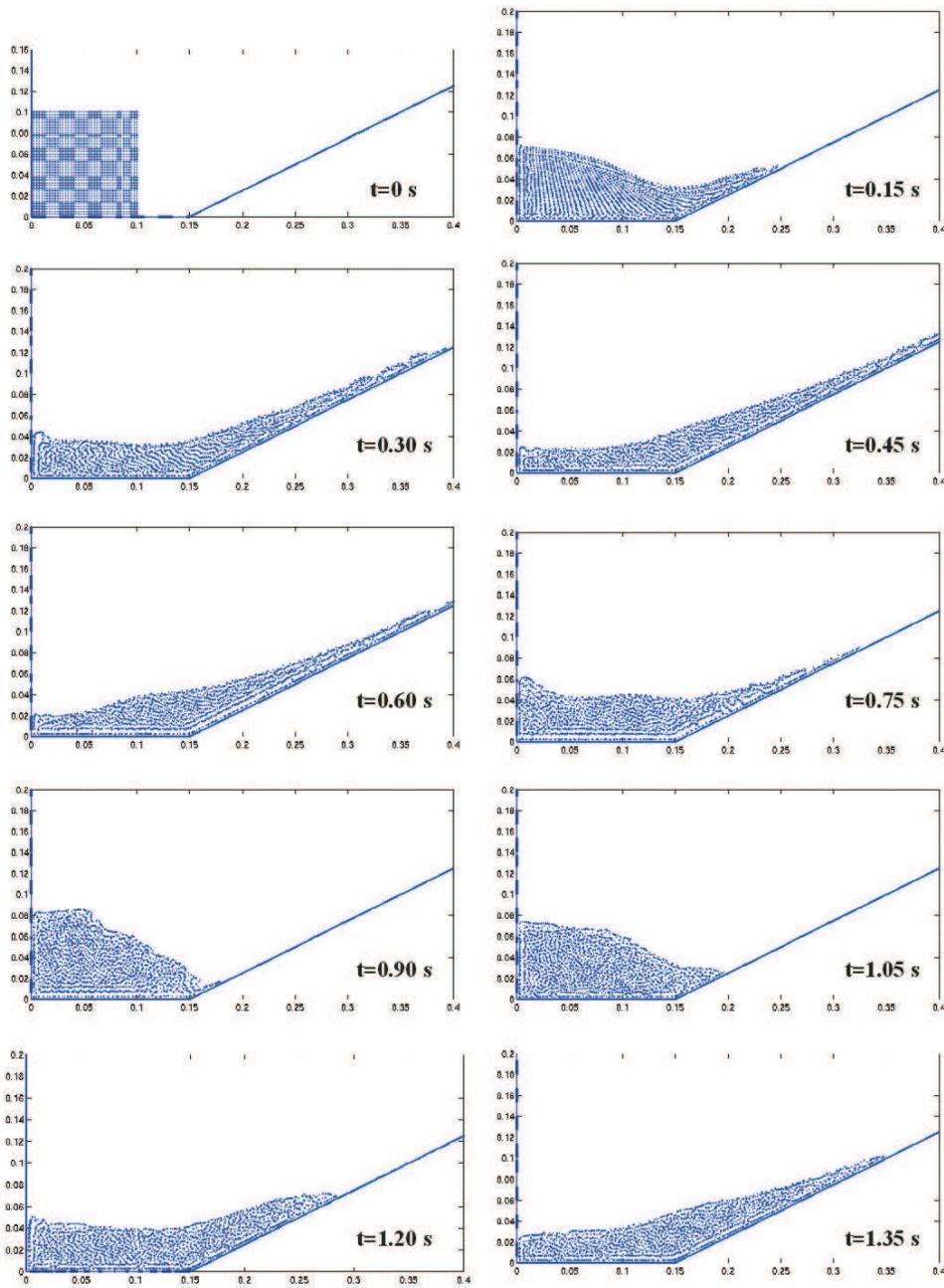


Figura 3. Evolución en el tiempo de las partículas de agua al romperse la presa (1)

más cercanas (las situadas a una distancia inferior a  $r_0$ ) una fuerza radial por unidad de masa

que viene dada por la expresión de Lennard-Jones [3]:

$$f(\mathbf{r}) = \begin{cases} D \left[ \left( \frac{r_0}{r} \right)^{p_1} - \left( \frac{r_0}{r} \right)^{p_2} \right] \frac{\mathbf{r}}{r^2}, & \text{si } r \leq r_0; \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (60)$$

en donde  $D$ , que tiene dimensiones de velocidad al cuadrado, es un factor de escala que hace que estas fuerzas sean comparables a la energía cinética por unidad de masa de las partículas. En este caso se ha tomado  $D \approx 5gH$ , siendo  $g$  la gravedad y  $H$  la altura inicial del agua en la presa. Además,  $p_1$  y  $p_2$  son dos parámetros que tienen que cumplir que  $p_1 > p_2$ , tomándose en este ejemplo  $p_1 = 4$  y  $p_2 = 2$ , y  $r$  es el módulo de la distancia de cada una de las partículas del contorno a las del fluido y  $r_0$  es la distancia máxima a partir de la cual tienen efecto estas fuerzas, tomándose normalmente la distancia inicial entre partículas.

Como se puede observar en las gráficas 3 y 4, esta modelización de los contornos permite obtener resultados altamente satisfactorios. En estas Figuras se representa la evolución de las partículas de agua para distintos tiempos intermedios. Se ha tomado un incremento del tiempo de  $\Delta t = 0,15 \text{ ms}$ . Como se observa, el movimiento del fluido presenta un comportamiento armónico amortiguado que representa bien lo que ocurre en la realidad. El tiempo final para el que se alcanza el reposo es de  $t = 4,5 \text{ s}$ .

## 8. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha estudiado el método SPH aplicado a problemas de fluidos y, en particular, a problemas de flujo con superficie libre. Se han analizado tres formulaciones: el método SPH, el método SPH corregido y el método SPH estándar-correcto. Las tres formulaciones se han planteado siguiendo el esquema básico de resolución de este tipo de problemas numéricos: establecer las ecuaciones que rigen el problema físico que se quiere resolver, determinar en qué puntos del dominio se quiere obtener la solución y sustituir la ecuación diferencial por una ecuación algebraica, lo que exige buscar aproximaciones en el espacio y en el tiempo.

Las correcciones introducidas en el método SPH se han deducido imponiendo que tanto las aproximaciones de las funciones como las de sus gradientes cumplan unos determinados requisitos de consistencia, es decir, que ajusten de forma exacta una función polinomial de determinado orden.

El objetivo del método SPH estándar-correcto es estudiar la resolución numérica del modelo matemático planteado, analizando la influencia de las correcciones y el distinto tratamiento de la viscosidad que distingue el método estándar del corregido. Este análisis se ha aplicado a un ejemplo en el que se estudia la evolución en el tiempo del movimiento de una gota de agua sometida a un determinado campo de velocidades, quedando patente que lo que más influye en la precisión de los resultados son las correcciones realizadas en el núcleo y en su gradiente, sin tener tanta importancia que la viscosidad se introduzca de forma artificial o que se resuelvan las ecuaciones considerando términos viscosos.

Asimismo, se ha realizado un segundo ejemplo cuyo objetivo es mostrar que estas técnicas son capaces de resolver problemas de flujo en superficie libre con grandes deformaciones, como

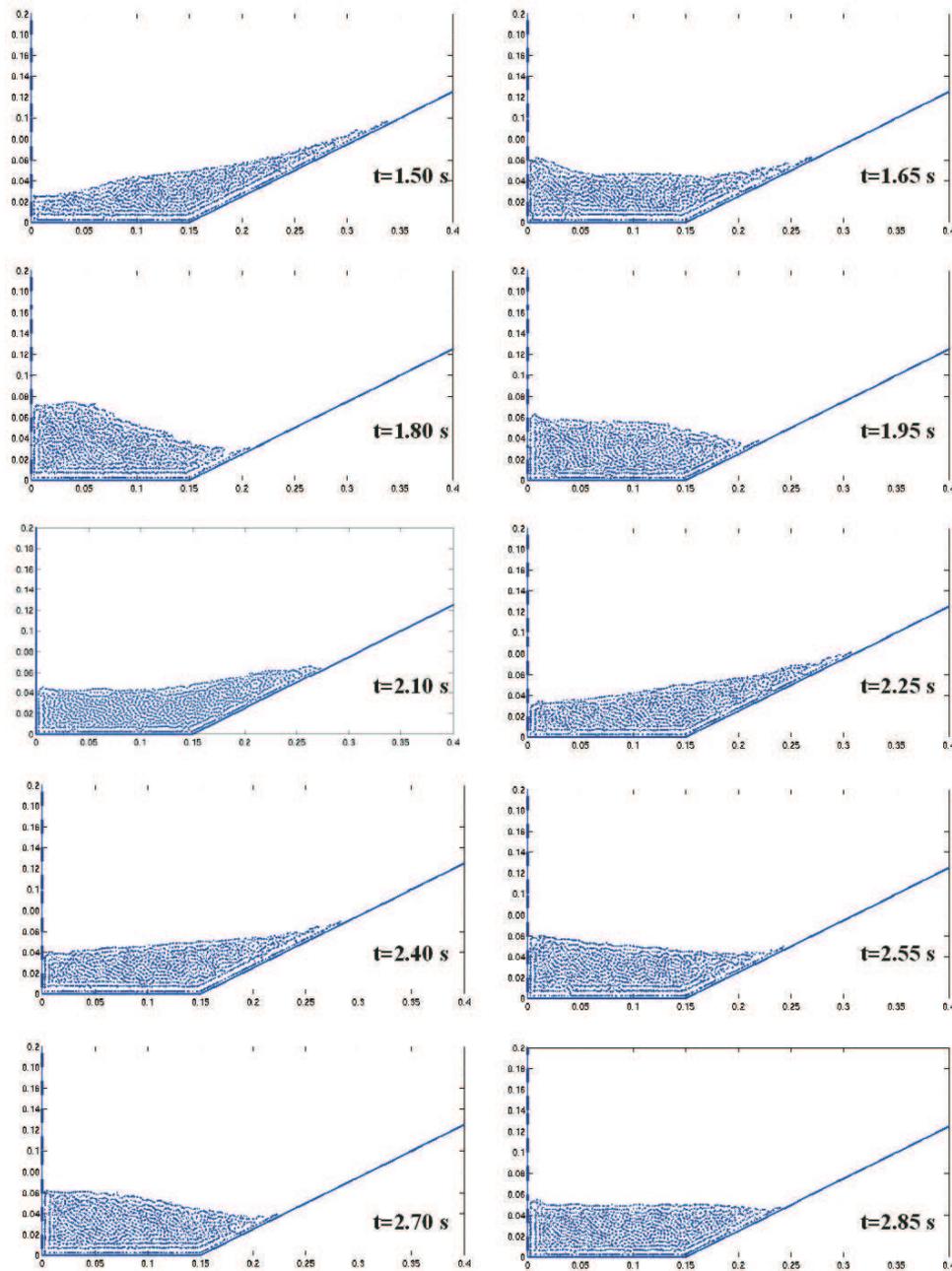


Figura 4. Evolución en el tiempo de las partículas de agua al romperse la presa (2)

los denominados problemas de “rotura de presa”. En este caso, aun careciendo de solución analítica, se puede concluir que los resultados obtenidos se ajustan bien a lo que ocurre en la realidad. De este tipo de ejemplos surge la necesidad de abrir una futura línea de desarrollo consistente en comparar estos resultados numéricos con ensayos experimentales.

Además, este segundo ejemplo nos ha permitido constatar la importancia que tiene la imposición de las condiciones de contorno en este tipo de flujos. Por este motivo, en la actualidad estamos analizando otras técnicas para tratar las zonas de borde que nos permitan establecer una metodología más general, consistente con toda la formulación y aplicable no sólo a este tipo de problemas, sino extensible al estudio de otros fenómenos físicos.

## 9. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la SGPICIT del Ministerio de Ciencia y Tecnología (#1FD97-0108 y #DPI2001-0556), así como por la Secretaría Xeral de I+D de la Xunta de Galicia y por la Universidad de La Coruña mediante proyectos y becas de investigación.

## REFERENCIAS

- [1] R.A. Gingold and J.J. Monaghan *Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars*, Mthly Notices Roy. Astron. Soc., **181**; 1977
- [2] J.J. Monaghan *Smoothed Particle Hydrodynamics*, Journal of Computational Physics, **110**, 399-406; 1994
- [3] J.J. Monaghan *Simulating Free Surface Flows with SPH*, Annu. Rev. Astron. Astrophys., **30**, 543-574; 1992
- [4] T. Belytschko, Y. Krongauz, D. Organ, M. Fleming and P. Krysl *Meshless methods: An overview and recent developments* Comput. Methods in Appl. Mech. and Engrg., **139**,3-49; 1996
- [5] J. Bonet, T.S.L. Lok *Variational and momentum preseving aspects of Smooth Particle Hydrodynamics formulations* Comput. Methods in Appl. Mech. and Engrg., **180**,97-115; 1998
- [6] S. Fernández-Méndez *Mesh-Free Methods and Finite Elements: Friend or Foe?* Doctoral Thesis. Barcelona ; September 2001
- [7] M.E. Gurtin *An Introduction to Continuum Mechanics* Mathematics in Science and Engineering, **158**, Academic Press; 1981
- [8] F.M. White *Mecánica de fluidos* McGraw-Hill; 1983
- [9] P.W. Randles, L.D. Libersky *SPH: Some recent improvements and applications* Comput. Methods in Appl. Mech. and Engrg., **139**,375-408; 1996
- [10] O.C. Zienkiewicz and K. Morgan *Finite Elements and Approximation* John Wiley & Sons, Inc; 1983
- [11] S. Kulasegaram *Development of Particle Based Meshless Method with Applications in Metal Forming Simulations* Doctoral Thesis. University of Wales Swansea; March 1999
- [12] W. K. Liu, S. Jun & Y.F. Zhang *Reproducing Kernel Particle Methods* Int. J. Num. Meth. Engrg., **20**; 1995
- [13] T. Belytschko, Y. Krongauz, J. Dolbow, and C. Gerlach *On the Completeness of Meshfree Particle Methods* Int. J. Num. Meth. Engrg., **43**,785-819; 1998
- [14] G. Mosqueira, I. Colominas, J. Bonet, F. Navarrina, M. Casteleiro *Development of integration schemes for meshless numerical approaches based on the SPH method*. ECCOMAS

CFD 2001, Swansea, 4-7 September 2001.

- [15] J.P. Morris *An Overview of the Method of Smoothed Particle Hydrodynamics* Universitat Kaiserslautern. Internal Report; 1995