

Preprint of the paper

**"Optimización topológica de estructuras: una formulación de mínimo peso con restricciones en tensión"**

F. Navarrina, I. Muiños, I. Colominas, M. Casteleiro (2002)

Proceedings del "V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería" (en CD-ROM).  
Madrid, España.

## OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA DE ESTRUCTURAS: UNA FORMULACIÓN DE MÍNIMO PESO CON RESTRICCIONES EN TENSIÓN

F. Navarrina, I. Muiños, I. Colominas y M. Casteleiro\*

\* GMNI — Grupo de Métodos Numéricos en Ingeniería,  
Depto. de Métodos Matemáticos y de Representación, Universidad de A Coruña,  
E.T.S. de Ing. de Caminos, Canales y Puertos  
Campus de Elviña, 15192 A Coruña, España  
e-mail: navarrina@iccp.udc.es, web: <http://caminos.udc.es/gmni>

**Palabras clave:** Optimización, Optimización Topológica, Diseño Óptimo, Diseño Óptimo de Estructuras, Optimización Estructural.

**Resumen.** *La optimización de formas y dimensiones en ingeniería estructural se plantea habitualmente mediante formulaciones de mínimo peso con restricciones impuestas que limitan los valores admisibles de tensiones y desplazamientos. Sin embargo, la optimización topológica se ha planteado tradicionalmente con un objetivo distinto: distribuir una cantidad predeterminada de material de forma que se maximice la rigidez de la pieza resultante para un determinado estado de carga. En este artículo se analizan y comparan ambos enfoques, y se presenta una formulación de mínimo peso con restricciones en tensión (MPRT) para la optimización topológica de estructuras mediante el Método de Elementos Finitos.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Hace aproximadamente cuatro décadas Schmidt [1] propuso una idea revolucionaria que dió origen a una nueva disciplina: los ingenieros, en general, tratan de diseñar objetos o sistemas de coste mínimo que durante su vida útil deben ser capaces de resistir las sollicitaciones máximas que se puedan producir; por tanto, los problemas de diseño (óptimo) podrían plantearse de forma sistemática en términos de problemas de minimización con restricciones, y podrían resolverse mediante técnicas de programación no lineal utilizando ordenadores digitales de alta velocidad.

Desde entonces, la optimización de formas y dimensiones en ingeniería estructural se ha planteado habitualmente mediante formulaciones de mínimo peso, con restricciones no lineales impuestas con el fin de limitar los valores admisibles de los campos de desplazamientos y tensiones [2, 3, 4].

Sin embargo, desde que Bendsøe y Kikuchi desarrollaron los conceptos básicos [5] en 1988, los problemas de optimización topológica se han planteado tradicionalmente mediante formulaciones de máxima rigidez. Con este tipo de planteamientos se pretende distribuir una cantidad predeterminada de material en un recinto de forma que se maximice la rigidez (se minimice la energía de deformación) de la pieza resultante para un determinado estado de carga [6].

De esta forma se evita tener que trabajar con numerosas restricciones altamente no lineales, habida cuenta del elevado número de variables de diseño que es consustancial a los problemas de optimización topológica. A cambio, no es posible contemplar múltiples estados de carga, y las formulaciones de máxima rigidez conducen —en principio— a problemas intrínsecamente mal planteados [7, 8], cuyas soluciones oscilan indefinidamente al refinar la discretización.

La formulación SIMP (solid isotropic material with penalty) [7, 8, 9] constituye el método de máxima rigidez más extendido en la actualidad. En esta formulación hay una variable de diseño por elemento (la densidad relativa, o complemento a uno de la porosidad) cuyo valor adimensional debe estar comprendido entre 0 y 1. El objetivo es hallar los valores de las variables de diseño (la cantidad de material que hay que disponer en cada elemento) de forma que se minimice una función objetivo fuertemente no lineal (la energía de deformación) con una sólo restricción sencilla (la cantidad total de material está limitada superiormente por un porcentaje predefinido, llamado factor de llenado, del volumen del recinto).

La formulación SIMP es fácil de implementar en el marco de un programa de elementos finitos, y existen procedimientos explícitos de actualización [7, 8] de las densidades relativas, lo que facilita la resolución del problema de minimización. Aparentemente, todo son ventajas.

Sin embargo, se producen sistemáticamente inestabilidades numéricas que impiden la convergencia de este tipo de métodos y que dan lugar a configuraciones en damero de carácter oscilante. Además, una posible solución en la que existan zonas extensas con valores intermedios de la densidad relativa (un material poroso) es considerada —por motivos prácticos y con carácter general— un resultado final indeseable. Por todo ello se imponen comúnmente penalizaciones o restricciones adicionales [7, 8], tanto para estabilizar la solución como para impedir la existencia de valores intermedios de la densidad relativa. Por último, al resultado final se le suele aplicar un filtrado de imagen que favorezca su interpretación.

Las soluciones obtenidas finalmente con estas correcciones semejan estructuras de barras [7]. Sin embargo este tipo de soluciones son cuestionables, ya que dependen de numerosos parámetros (factor de llenado, grado de discretización, penalizaciones aplicadas, filtrado de imagen, etc.). Además, el diseño final puede no ser aceptable en la práctica, ya que la formulación no tiene en cuenta el estado tensional de la pieza. Y es evidente que el diseño más rígido que se puede construir con una cierta cantidad de material no tiene por qué coincidir con el diseño más económico (en términos de material) que es capaz de resistir unas determinadas sollicitaciones.

Con el fin de obviar estos inconvenientes se ha desarrollado la formulación MPRT [8, 10] de mínimo peso con restricciones en tensión para la optimización topológica de estructuras mediante el Método de Elementos Finitos, que se presenta a continuación.

## 2. MODELO DE CÁLCULO ESTRUCTURAL

### 2.1. El problema de análisis estructural

Sea un dominio  $\Omega^o$  que se encuentra en equilibrio bajo un conjunto de acciones exteriores. Como consecuencia de ello, el dominio se habrá deformado en otro  $\Omega$  y sus puntos habrán cambiado de posición. Sea  $P^o$  un punto del dominio  $\Omega^o$  que al deformarse tendrá otra posición  $P$  en  $\Omega$ . Sea  $\mathbf{r}^o$  el vector de posición de  $P^o$  y  $\mathbf{r}$  el vector de posición de  $P$ .

Nuestro objetivo es calcular los desplazamientos

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}^o) = \mathbf{r}(\mathbf{r}^o) - \mathbf{r}^o, \quad (1)$$

a partir de los cuales se pueden obtener las deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r}^o)$  y las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}^o)$ .

En elasticidad lineal (pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones) las expresiones correspondientes son

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{u}, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2)$$

Si las acciones exteriores son fuerzas por unidad de volumen ocupado por el material  $\mathbf{b}(\mathbf{r}^o)$  que actúan en el dominio  $\Omega^o$ , y fuerzas por unidad de superficie  $\mathbf{t}(\mathbf{r}^o)$  que actúan en la superficie  $\Gamma_\sigma^o$ , el problema de cálculo estructural se puede escribir en los siguientes términos [11, 12]

$$\begin{aligned} \text{Hallar } & \mathbf{u} \in \mathcal{H}_u \\ \text{tal que } & a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{b})_{\Omega^o} + (\mathbf{w}, \mathbf{t})_{\Gamma_\sigma^o} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{H}_w \\ \text{siendo } & a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \iiint_{\Omega^o} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) \, d\Omega, \\ & (\mathbf{w}, \mathbf{b})_{\Omega^o} = \iiint_{\Omega^o} \mathbf{w}^T \mathbf{b} \, d\Omega, \\ & (\mathbf{w}, \mathbf{t})_{\Gamma_\sigma^o} = \iint_{\Gamma_\sigma^o} \mathbf{w}^T \mathbf{t} \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

donde las funciones de prueba  $\mathbf{u}$  deben verificar las condiciones de contorno esenciales (desplazamientos conocidos), y las funciones de prueba  $\mathbf{w}$  deben verificar las correspondientes condiciones de contorno homogéneas.

## 2.2. El modelo numérico de elementos finitos

En general, no es posible obtener la solución analítica del problema anterior. Por ello, reemplazamos los espacios de funciones  $\mathcal{H}_u$  y  $\mathcal{H}_w$  por subespacios de dimensión finita  $\mathcal{H}_u^h$  y  $\mathcal{H}_w^h$ , y las funciones de prueba  $\mathbf{u}$  y las funciones de test  $\mathbf{w}$  por sus discretizaciones respectivas  $\mathbf{u}^h$  y  $\mathbf{w}^h$  en estos espacios. Si  $\mathbf{u}^p$  es una función que satisface las condiciones de contorno esenciales, y las bases de funciones  $\{\phi_i(\mathbf{r}^o)\}$  y  $\{w_j(\mathbf{r}^o)\}$  verifican las correspondientes condiciones de contorno homogéneas, podemos escribir [11, 12]

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o) = \mathbf{u}^p(\mathbf{r}^o) + \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{r}^o) \boldsymbol{\alpha}_i, \quad \Phi_i(\mathbf{r}^o) = \phi_i(\mathbf{r}^o) \mathbf{I}_3, \quad (4)$$

$$\mathbf{w}^h(\mathbf{r}^o) = \sum_{j=1}^N \mathbf{W}_j(\mathbf{r}^o) \boldsymbol{\beta}_j, \quad \mathbf{W}_j(\mathbf{r}^o) = w_j(\mathbf{r}^o) \mathbf{I}_3. \quad (5)$$

En el Método de los Elementos Finitos la incógnita  $\boldsymbol{\alpha}_i$  es el vector de desplazamientos del nodo  $i$ -ésimo. Además, el dominio  $\Omega^o$  se discretiza de forma que

$$\bar{\Omega}^o = \bigcup_{e=1}^{nelem} \bar{E}_e, \quad (6)$$

siendo  $E_e$  cada uno de los elementos utilizados en la discretización.

Por otro lado, en mecánica de sólidos es habitual emplear el método de Galerkin, que consiste en utilizar como base de las funciones de test la misma base de las funciones de prueba, es decir

$$w_j(\mathbf{r}^o) = \phi_j(\mathbf{r}^o). \quad (7)$$

Por tanto, el modelo numérico de cálculo de estructuras se formulará en general en los siguientes términos:

$$\begin{aligned} \text{Hallar } & \boldsymbol{\alpha} = \{\boldsymbol{\alpha}_i\}, \quad i = 1, \dots, N \\ \text{tal que } & \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_{ji} \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{f}_j, \quad j = 1, \dots, N \\ \text{siendo } & \mathbf{K}_{ji} = a(\Phi_j, \Phi_i), \\ & \mathbf{f}_j = (\Phi_j, \mathbf{b})_{\Omega^o} + (\Phi_j, \mathbf{t})_{\Gamma_g^o} - a(\Phi_j, \mathbf{u}^p). \end{aligned} \quad (8)$$

Habitualmente el cálculo se realiza elemento a elemento, de forma que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ji} &= \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{K}_{ji}^e, \\ \mathbf{f}_j &= \iint_{\Gamma_g^o} \Phi_j^T \mathbf{t} \, d\Gamma + \sum_{e=1}^{nelem} \mathbf{f}_j^e, \end{aligned} \quad (9)$$

siendo las contribuciones elementales

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ji}^e &= \iiint_{E_e} (\mathbf{L}\Phi_j)^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\Phi_i) d\Omega, \\ \mathbf{f}_j^e &= \iiint_{E_e} \left( \Phi_j^T \mathbf{b} - (\mathbf{L}\Phi_j)^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}^p) \right) d\Omega. \end{aligned} \quad (10)$$

Una vez hallada la solución  $\boldsymbol{\alpha}$  del problema (8) es posible calcular en cualquier punto  $\mathbf{r}^o \in \Omega^o$  las aproximaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o) &= \mathbf{u}^p(\mathbf{r}^o) + \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{r}^o) \boldsymbol{\alpha}_i, \\ \boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{r}^o) &= \mathbf{L}\mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o), \\ \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}^o) &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{r}^o). \end{aligned} \quad (11)$$

### 3. FORMULACIÓN MPRT

#### 3.1. El problema de análisis estructural con densidad relativa variable

Supongamos que el dominio  $\Omega^o$  se encuentra ocupado por un material poroso. Sea  $\rho(\mathbf{r}^o)$  el valor de la densidad relativa del material (complemento a uno de la porosidad cuyo valor adimensional debe estar comprendido entre 0 y 1) en el punto  $P^o$  definido por el vector de posición  $\mathbf{r}^o$

Para una distribución del material determinada, definida por el campo de densidades relativas  $\rho(\mathbf{r}^o)$ , nuestro objetivo es calcular los desplazamientos (1), a partir de los cuales se pueden obtener las deformaciones y las tensiones mediante las expresiones (2).

Asumimos, por tanto, que nos encontramos en el rango de validez de las hipótesis de la elasticidad lineal (con pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones).

Sea un entorno diferencial del punto  $P^o$  de volumen  $d\Omega$ . Por definición, el volumen efectivamente ocupado por el material será  $\rho(\mathbf{r}^o)d\Omega$ .

En estos términos, el problema de cálculo estructural (3) adopta la forma siguiente [8]:

$$\begin{aligned} \text{Dado} \quad & \rho(\Omega^o) \\ \text{hallar} \quad & \mathbf{u} \in \mathcal{H}_u \\ \text{tal que} \quad & a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = (\mathbf{w}, \mathbf{b})_{\Omega^o} + (\mathbf{w}, \mathbf{t})_{\Gamma_g} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{H}_w \\ \text{siendo} \quad & a(\mathbf{w}, \mathbf{u}) = \iiint_{\Omega^o} (\mathbf{L}\mathbf{w})^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}) \rho d\Omega, \\ & (\mathbf{w}, \mathbf{b})_{\Omega^o} = \iiint_{\Omega^o} \mathbf{w}^T \mathbf{b} \rho d\Omega, \\ & (\mathbf{w}, \mathbf{t})_{\Gamma_g} = \iint_{\Gamma_g} \mathbf{w}^T \mathbf{t} d\Gamma. \end{aligned} \quad (12)$$

Obsérvese que las modificaciones introducidas en el planteamiento original han sido mínimas, y se limitan a tener en cuenta el efecto de la porosidad del material en la integración.

De hecho —una vez conocido el campo de desplazamientos— el cálculo de deformaciones y tensiones se realiza exactamente con el mismo procedimiento, con independencia de que el material sea o no poroso, e incluso con independencia del valor de la densidad relativa en cada punto.

Obviamente, se excluye de la afirmación anterior el caso en que la densidad relativa se anule localmente. En tal caso no hay material en el punto en cuestión, y por tanto el cálculo de deformaciones y tensiones, y el propio campo de desplazamientos, carecen de sentido.

Merece la pena reflexionar brevemente sobre el significado físico de las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}^o)$  calculadas mediante las expresiones (2). Se trata, en efecto, de las componentes del tensor de tensiones a las que está sometido realmente el material deformable. Sin embargo, debemos recordar que en el entorno de cada punto hay zonas ocupadas por material y zonas vacías. Por tanto, si se trata de analizar el equilibrio de fuerzas en un subdominio finito, es preciso multiplicar las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}^o)$  por la densidad relativa  $\rho(\mathbf{r}^o)$ . El resultado se puede denominar tensión efectiva.

### 3.2. Introducción de la densidad relativa en el modelo numérico

Sea  $\rho_e$  la densidad relativa del elemento  $e$ -ésimo, que se supone constante dentro del elemento, y sea  $\boldsymbol{\rho} = \{\rho_e\}$  ( $e = 1, \dots, n_{elem}$ ) el vector de densidades relativas, que constituirán las variables de diseño del problema de optimización topológica.

Para valores dados de las densidades relativas de cada elemento, el problema de cálculo estructural que hay que resolver es el siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{Hallar } \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\rho}) \\ & \text{tal que } \sum_{i=1}^N \mathbf{K}_{ji}(\boldsymbol{\rho}) \boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{f}_j(\boldsymbol{\rho}), \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (13)$$

En este caso el cálculo también se realiza por elementos, de forma que

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ji}(\boldsymbol{\rho}) &= \sum_{e=1}^{n_{elem}} \mathbf{K}_{ji}^e(\rho_e), \\ \mathbf{f}_j(\boldsymbol{\rho}) &= \iint_{\Gamma_j^o} \boldsymbol{\Phi}_j^T \mathbf{t} \, d\Gamma + \sum_{e=1}^{n_{elem}} \mathbf{f}_j^e(\rho_e), \end{aligned} \quad (14)$$

siendo las contribuciones elementales

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ji}^e(\rho_e) &= \iiint_{E_e} (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}_j)^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}_i) \rho_e \, d\Omega, \\ \mathbf{f}_j^e(\rho_e) &= \iiint_{E_e} \left( \boldsymbol{\Phi}_j^T \mathbf{b} - (\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}_j)^T \mathbf{D}(\mathbf{L}\mathbf{u}^p) \right) \rho_e \, d\Omega. \end{aligned} \quad (15)$$

Obviamente, una vez hallada la solución  $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\rho})$  del problema (13) es posible calcular en cual-

quier punto  $\mathbf{r}^o \in \Omega^o$  las aproximaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{u}^p(\mathbf{r}^o) + \sum_{i=1}^N \Phi_i(\mathbf{r}^o) \boldsymbol{\alpha}_i(\boldsymbol{\rho}), \\ \boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{L} \mathbf{u}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}), \\ \boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}) &= \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho}).\end{aligned}\tag{16}$$

Comparando (11) con (16) se observa que los desplazamientos, deformaciones y tensiones se calculan en esencia de la manera habitual. Por tanto, para utilizar un modelo numérico de análisis estructural en un sistema de optimización topológica basta con modificar el cálculo de las contribuciones elementales (10), introduciendo la densidad relativa en la integración como se pone de manifiesto en las expresiones (15), lo que no reviste especial dificultad (máxime si se tiene en cuenta que la densidad relativa es constante en cada elemento).

De hecho, y debido precisamente a que la densidad relativa es constante en cada elemento, las contribuciones (15) pueden calcularse multiplicando los cálculos originales (10) por las correspondientes densidades relativas. A su vez, los cálculos originales (10) proporcionan las derivadas primeras de cada contribución (15) respecto a la densidad relativa del elemento correspondiente. Las restantes derivadas primeras y todas las derivadas de orden superior de las contribuciones (15) respecto a las variables de diseño (las densidades relativas de los elementos) son evidentemente nulas.

Por tanto, para adaptar un modelo numérico convencional de análisis estructural mediante el método de elementos finitos, de forma que pueda ser empleado como módulo de cálculo de un sistema de optimización topológica, no es necesario modificar el código al nivel del cálculo de las contribuciones elementales. Basta, en la práctica, con realizar pequeñas modificaciones al nivel de la organización general del programa, con el fin de manipular adecuadamente los valores de las densidades relativas de los elementos. De hecho, un código convencional debe proporcionar todo lo necesario para realizar los cálculos inducidos por la introducción de la densidad relativa, e incluso su análisis de sensibilidad.

### 3.3. Planteamiento de las restricciones en tensión

De acuerdo con lo expuesto anteriormente, los valores  $\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}^o, \boldsymbol{\rho})$  calculados mediante las expresiones (16) son aproximaciones numéricas de las componentes del tensor de tensiones a las que está sometido realmente el material deformable. Por tanto, para limitar el valor de una tensión de comparación  $\hat{\sigma}(\boldsymbol{\sigma})$  en el punto  $\mathbf{r}_j^o$  debemos imponer una restricción del tipo

$$g_j(\boldsymbol{\rho}) = \hat{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}_j^o, \boldsymbol{\rho})) - \hat{\sigma}_{max} \leq 0,\tag{17}$$

si deseamos que la tensión no supere el valor máximo admisible  $\hat{\sigma}_{max}$ , o una restricción del tipo

$$g_j(\boldsymbol{\rho}) = \hat{\sigma}_{min} - \hat{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}_j^o, \boldsymbol{\rho})) \leq 0.\tag{18}$$

si deseamos que la tensión supere forzosamente el valor mínimo admisible  $\hat{\sigma}_{min}$ .

Sin embargo, y dado que el material es poroso, si se tratase de analizar el equilibrio de fuerzas en un entorno del punto  $\mathbf{r}_j^o$ , sería preciso multiplicar los valores  $\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}_j^o, \boldsymbol{\rho})$  por la densidad relativa  $\rho(\mathbf{r}_j^o)$  para trabajar con los valores efectivos a escala macroscópica de las fuerzas y tensiones que se encuentran en equilibrio. Evidentemente, es posible plantear una forma alternativa de las restricciones tipo (17) y (18) en términos de tensiones efectivas, para lo que basta multiplicar por la densidad relativa ambas expresiones, lo que da lugar a la restricción tipo

$$g(\boldsymbol{\rho}) = \left[ \widehat{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}_j^o, \boldsymbol{\rho})) - \widehat{\sigma}_{max} \right] \rho(\mathbf{r}_j^o) \leq 0, \quad (19)$$

si se desea limitar superiormente la tensión efectiva, y a la restricción tipo

$$g(\boldsymbol{\rho}) = \left[ \widehat{\sigma}_{min} - \widehat{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}_j^o, \boldsymbol{\rho})) \right] \rho(\mathbf{r}_j^o) \leq 0, \quad (20)$$

si se desea limitar inferiormente la tensión efectiva.

Es evidente que las restricciones tipo (17) y (18) son equivalentes respectivamente a las restricciones tipo (19) y (20), excepto en el caso de que la densidad relativa se anule, lo que sucede cuando se elimina la totalidad del material en torno al punto en cuestión. Aparentemente la diferencia entre las dos formas de plantear las restricciones es poco significativa. Sin embargo, puede tener efectos imprevisibles e incluso devastadores, tanto sobre el comportamiento del algoritmo de optimización como sobre el resultado final.

Para ilustrar este punto recurriremos a un problema académico de tipo conceptual. Sea una viga de sección rectangular maciza de canto  $2c$  y ancho  $b$ . Sea  $\sigma_e$  el límite elástico del material. Supongamos que la viga está sometida a flexión pura, y está solicitada por el máximo momento flector  $M_f$  que es capaz de resistir sin sobrepasar el límite elástico. Un sencillo cálculo de resistencia de materiales demuestra que

$$M_f = \frac{I}{c} \sigma_e, \quad \text{siendo la inercia} \quad I = \frac{2}{3} bc^3. \quad (21)$$

Se añaden a la viga dos capas de espesor  $\eta c$  ( $\eta \ll 1$ ), una en su parte superior y la otra en su parte inferior, y se mantiene el valor del momento flector. En estas condiciones planteamos el siguiente problema (trivial) de optimización topológica: hallar la densidad relativa  $\rho$  del material que hay que disponer en las dos nuevas capas (no se modifica la parte original de la viga) de forma que se minimice el peso de la estructura sin que se supere el límite elástico del material. La solución exacta del problema anterior es obviamente  $\rho = 0$ .

Un sencillo cálculo de resistencia de materiales demuestra nuevamente que la tensión en la fibra más solicitada alcanza ahora el valor

$$\sigma(\rho) = \left[ 1 + \frac{\eta - (3\eta + 3\eta^2 + \eta^3)\rho}{1 + (3\eta + 3\eta^2 + \eta^3)\rho} \right] \sigma_e \quad (22)$$

en función de la densidad relativa  $\rho$ .

Por tanto, la restricción en tensión tipo (17) se puede expresar en la forma

$$g(\rho) = \left[ \frac{\eta - (3\eta + 3\eta^2 + \eta^3)\rho}{1 + (3\eta + 3\eta^2 + \eta^3)\rho} \right] \sigma_e \leq 0. \quad (23)$$

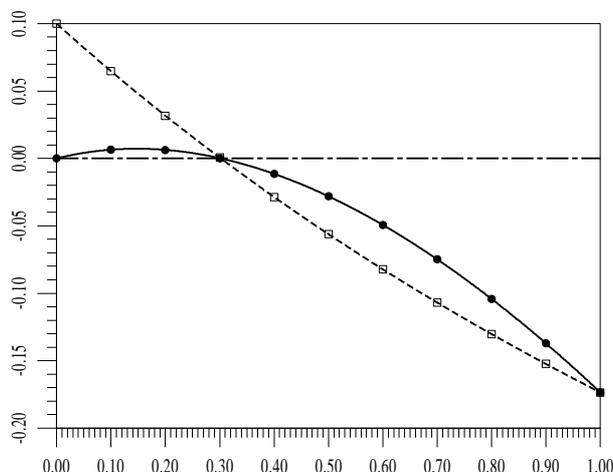


Figura 1. Comparación del comportamiento de las restricciones [□ = (23)] y [● = (24)] para un valor del parámetro  $\eta=0.1$  en función de la densidad relativa. (Nota: el valor de la restricción se da en tanto por uno del límite elástico.)

A la vista de la representación gráfica de esta función (véase la figura 1) está claro que la restricción se incumple para valores de la densidad relativa inferiores a  $\rho \approx 1/3$ . En particular, los valores de la densidad relativa para los que la restricción se incumple más fuertemente son precisamente los valores próximos a la solución  $\rho = 0$ . En definitiva, nos encontramos en una situación en la que la solución óptima requiere la retirada completa del material, puesto que no es necesario, pero en un entorno de la solución óptima (es decir para cualquier valor de  $\rho$  ligeramente mayor que 0) la restricción está fuertemente violada y su gradiente es negativo. Si lo primero es grave lo segundo es aún peor, puesto que cualquier algoritmo consistente de programación no lineal tratará en estas condiciones de aumentar el valor de la densidad relativa, lo que imposibilita la convergencia a la solución real y conduce —en el mejor de los casos— a un óptimo no global de mayor coste.

Si reescribimos la restricción (23) en términos de tensiones efectivas (esto es multiplicando la desigualdad por la densidad relativa) obtenemos la expresión alternativa

$$g(\rho) = \left[ \frac{\eta - (3\eta + 3\eta^2 + \eta^3)\rho}{1 + (3\eta + 3\eta^2 + \eta^3)\rho} \right] \rho \sigma_e \leq 0. \quad (24)$$

La representación gráfica de esta función (véase nuevamente la figura 1) muestra que la restricción se sigue incumpliendo para valores de la densidad relativa inferiores a  $\rho \approx 1/3$ . Sin embargo, la restricción formulada en estos términos se verifica (estrictamente) en la solución  $\rho = 0$ . Pero lo más importante es que ahora el gradiente es positivo en el entorno de la solución. Por tanto, para valores de  $\rho$  no muy alejados de la solución exacta (inferiores a  $1/6$  aproximadamente) cualquier algoritmo consistente de programación no lineal tratará de disminuir el valor de la densidad relativa, lo que posibilita la convergencia al óptimo global.

El problema conceptual que acabamos de presentar pone de manifiesto uno de los puntos críticos de las formulaciones de mínimo peso con restricciones en tensión. El reto es encontrar una forma de plantear el criterio de rotura para densidades relativas intermedias de forma

que se puedan alcanzar densidades relativas próximas a cero en zonas donde el material no sea necesario, y densidades relativas próximas a uno donde el material sea necesario, todo ello sin sobreestimar su capacidad resistente y sin que se consideren fuertemente violadas las restricciones en zonas de las que finalmente se eliminará la totalidad del material.

El planteamiento en tensiones efectivas no resuelve completamente el problema. Aparentemente, el planteamiento de las restricciones en estos términos puede enlentecer notablemente la convergencia. Hemos realizado algunos experimentos numéricos recientemente, pero aún no tenemos resultados concluyentes. Creemos, sin embargo, que esta línea es prometedora, y esperamos obtener resultados en un futuro próximo. En [8] puede encontrarse una discusión más detallada al respecto.

### 3.4. El problema de optimización

Siendo  $\gamma_{mat}$  la densidad del material, definimos la función objetivo

$$F(\boldsymbol{\rho}) = \int_{\Omega} \rho^{\frac{1}{p}} \gamma_{mat} d\Omega = \sum_{e=1}^{nelem} (\rho_e)^{\frac{1}{p}} \int_{E_e} \gamma_{mat} d\Omega \quad (25)$$

en la que valores del parámetro  $p$  distintos de la unidad permiten primar la compacidad del material ( $p > 1$ ) o su porosidad ( $p < 1$ ).

En estos términos, el problema de optimización topológica se reduce a

$$\begin{aligned} \text{Hallar} \quad & \boldsymbol{\rho} = \{\rho_e\}, & e = 1, \dots, nelem \\ \text{que minimiza} \quad & F(\boldsymbol{\rho}) \\ \text{verificando} \quad & g_j(\boldsymbol{\rho}) \leq 0, & j = 1, \dots, m \\ & 0 < \rho_{min} \leq \rho_e \leq 1, & e = 1, \dots, nelem \end{aligned} \quad (26)$$

donde las restricciones en tensión  $g_j$  en los correspondientes puntos  $\mathbf{r}_j^o$  se formulan de acuerdo con lo expuesto en el apartado anterior, y las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}^h(\mathbf{r}_j^o, \boldsymbol{\rho})$  se calculan mediante el modelo numérico propuesto. Obviamente se pueden introducir restricciones sobre el valor de los desplazamientos, de forma similar. Por otro lado, se limita inferiormente el valor de la densidad relativa con el fin de impedir la eliminación total del material, lo que podría producir la singularidad de la matriz de coeficientes del problema.

La implementación de esta formulación se ha realizado utilizando una metodología de tipo general [3] y las técnicas de análisis de sensibilidad [4] previamente desarrolladas por los autores. Como algoritmo de programación matemática se ha utilizado un método de programación lineal secuencial con line-search [13] también desarrollado por los autores.

En este caso cabe destacar que la optimización topológica se realiza de forma muy similar a la optimización de dimensiones, ya que las variables de diseño no modifican la forma de los elementos. Además, las modificaciones que ha sido necesario introducir en el módulo de cálculo han sido mínimas, y tan sólo ha sido necesario desarrollar el módulo de análisis de sensibilidad respecto a la densidad relativa, lo que no reviste especial dificultad, tal y como se ha expuesto en el apartado anterior.

## 4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Los ejemplos que se presentan a continuación son realmente bidimensionales. El ancho de las piezas es constante, y los cálculos se realizan en tensión plana. Sin embargo, se representan los resultados en tres dimensiones, de forma que la densidad relativa de cada elemento se interpreta como el espesor [8] de la pieza.

Como puede observarse, las soluciones obtenidas parecen ser correctas a pesar de que no son asimilables a estructuras de barras. De hecho, se aproximan más a lo que sugiere la intuición ingenieril que los diseños tipo estructura articulada que proporcionan las formulaciones de máxima rigidez [8].

### 4.1. Estructuras con pequeña relación canto/luz

Las figuras 2 y 3 muestran los resultados obtenidos al optimizar una estructura biapoyada de pequeña relación canto/luz, con movimientos horizontales permitidos y coartados (respectivamente). El recinto en el que se diseña la estructura óptima tiene 32 m de longitud y 1.5 m de canto.

La pieza tiene 1 m de ancho y el cálculo se realiza en tensión plana. Por simetría se analiza la mitad de la pieza. El dominio se discretiza en 24 elementos a lo largo y 8 según el canto.

En ambos casos, la estructura soporta una carga puntual (vertical y hacia abajo) de 9000 KN aplicada en el centro del borde superior. El material es acero con densidad  $\gamma_{mat}=7650 \text{ Kg/m}^3$  y límite elástico  $\sigma_e=230000 \text{ KN/m}^2$ . De acuerdo con la norma NBE EA-95 [14] se aplican las restricciones siguientes

$$\sigma_{vm} \leq \sigma_e; \quad \sigma^I \leq 2\sigma_e; \quad \sigma^{III} \geq -2\sigma_e, \quad (27)$$

siendo  $\sigma_e$  el límite elástico y  $\sigma_{vm}$  la tensión de comparación de Von Mises

$$\sigma_{ve} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma^I - \sigma^{II})^2 + (\sigma^{II} - \sigma^{III})^2 + (\sigma^{III} - \sigma^I)^2 \right]} \quad (28)$$

Las restricciones se imponen en el centro de todos los elementos en las formas tipo (17) y (18). Por tanto, no se ha utilizado en estos ejemplos el planteamiento en tensiones efectivas.

Por simplicidad no se ha optimizado la zona próxima a los apoyos.

En el primer caso se obtiene claramente una viga en doble T de sección variable. El ancho de las alas aumenta desde los apoyos hasta el centro, donde está aplicada la carga, y la sección central es simétrica.

En el segundo caso se obtiene un resultado similar, pero se observa que la sección central no es simétrica y se asemeja más a una T que a una doble T. En efecto, el ala inferior de la estructura casi desaparece, ya que la tracción producida por la flexión se equilibra con la compresión debida a que los movimientos horizontales están ahora coartados.

### 4.2. Estructuras con gran relación canto/luz

Por su parte, las figuras 4 y 5 muestran los resultados obtenidos al optimizar una estructura biapoyada de gran relación canto luz, con movimientos horizontales permitidos y coartados

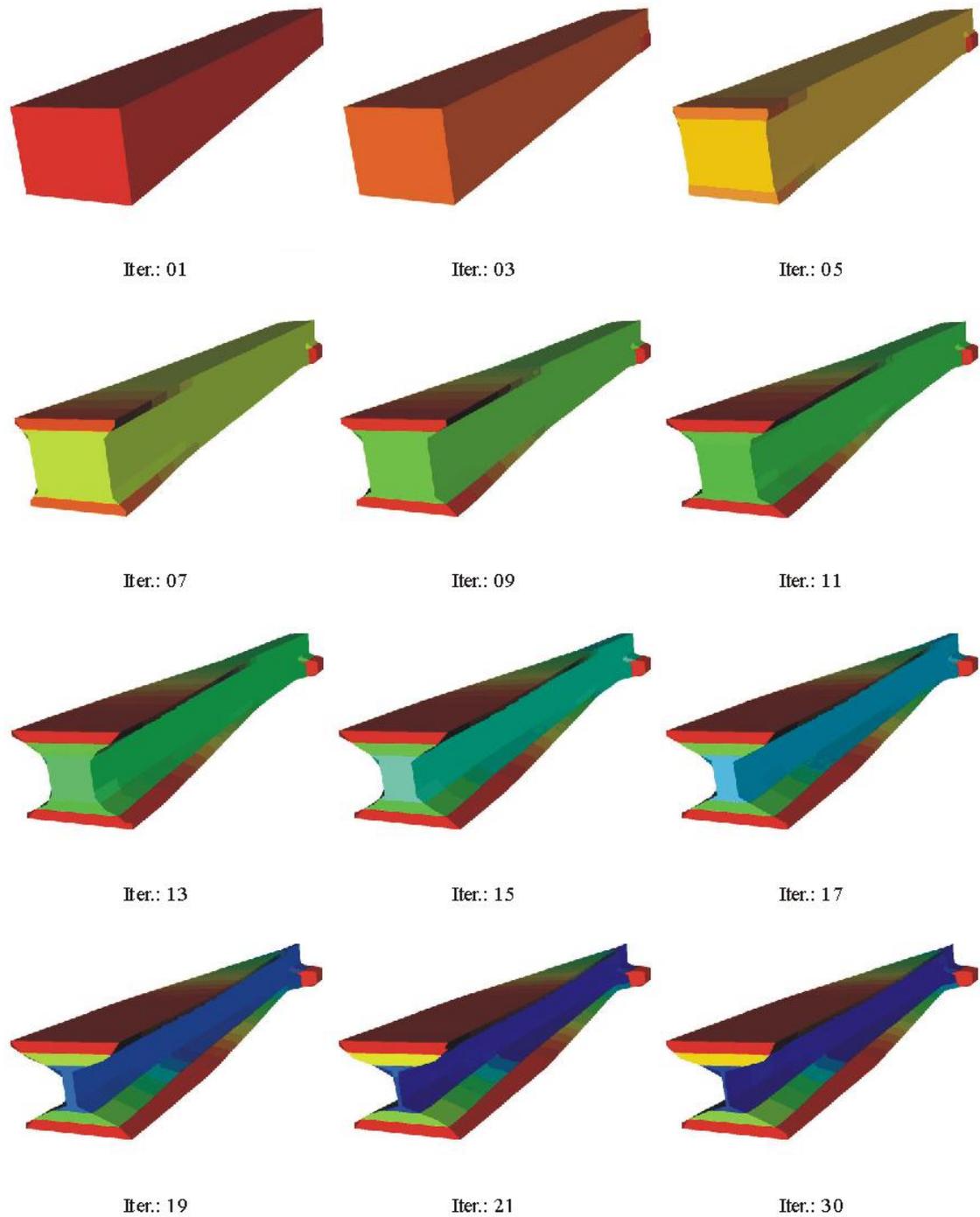


Figura 2. Optimización topológica de una estructura biapoyada con movimientos horizontales no coartados y pequeña relación canto/luz. Carga puntual en el centro del borde superior. Formulación de mínimo peso con restricciones en tensión. (Nota: Se representa la mitad de la estructura para que pueda apreciarse la forma de la sección central.)

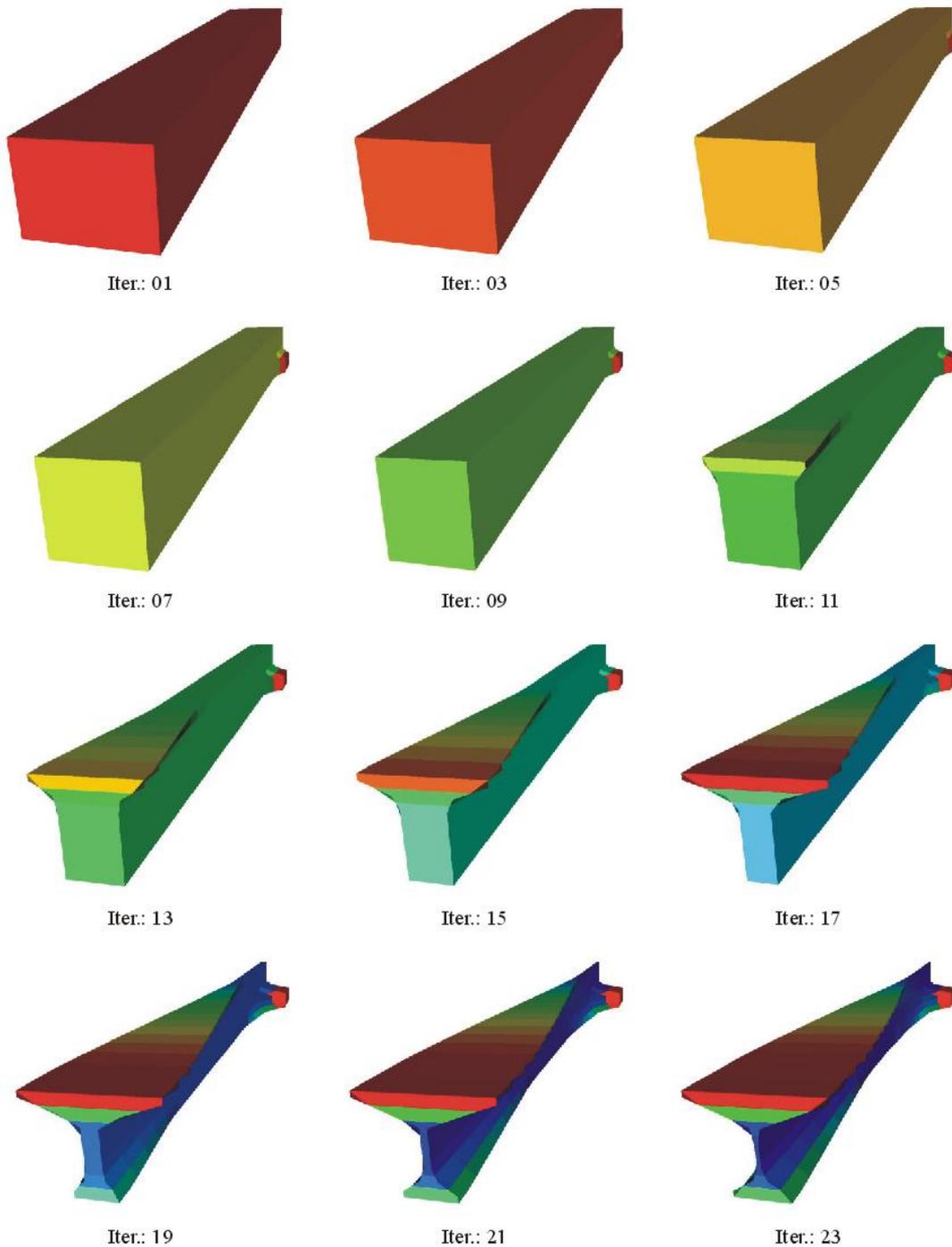


Figura 3. Optimización topológica de una estructura biapoyada con movimientos horizontales coartados y pequeña relación canto/luz. Carga puntual en el centro del borde superior. Formulación de mínimo peso con restricciones en tensión. (Nota: Se representa la mitad de la estructura para que pueda apreciarse la forma de la sección central.)

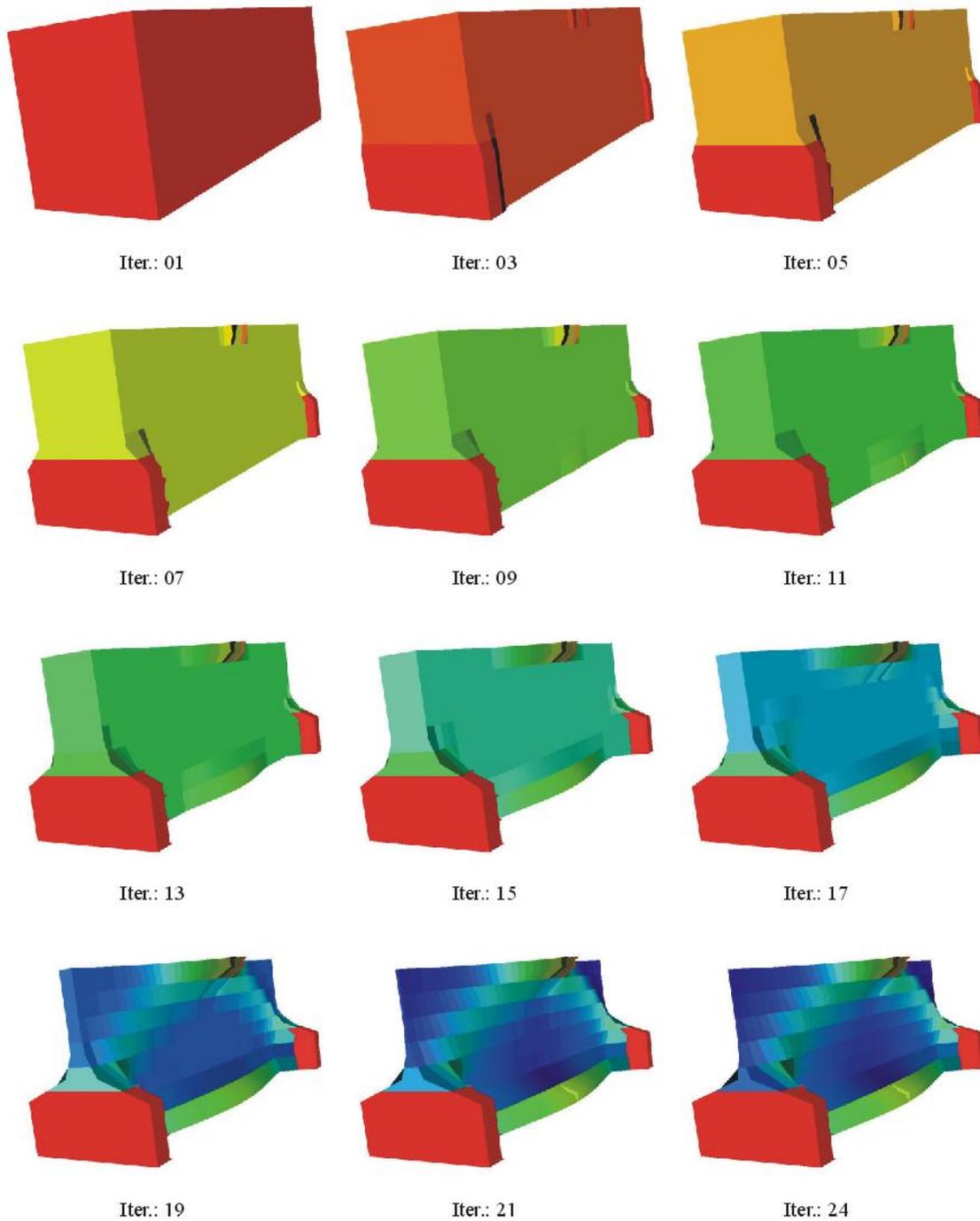


Figura 4. Optimización topológica de una estructura biapoyada con movimientos horizontales no coartados y gran relación canto/luz. Carga puntual en el centro del borde superior. Formulación de mínimo peso con restricciones en tensión. (Notas: No se optimiza la zona de los apoyos; no se permite la total eliminación del material.)

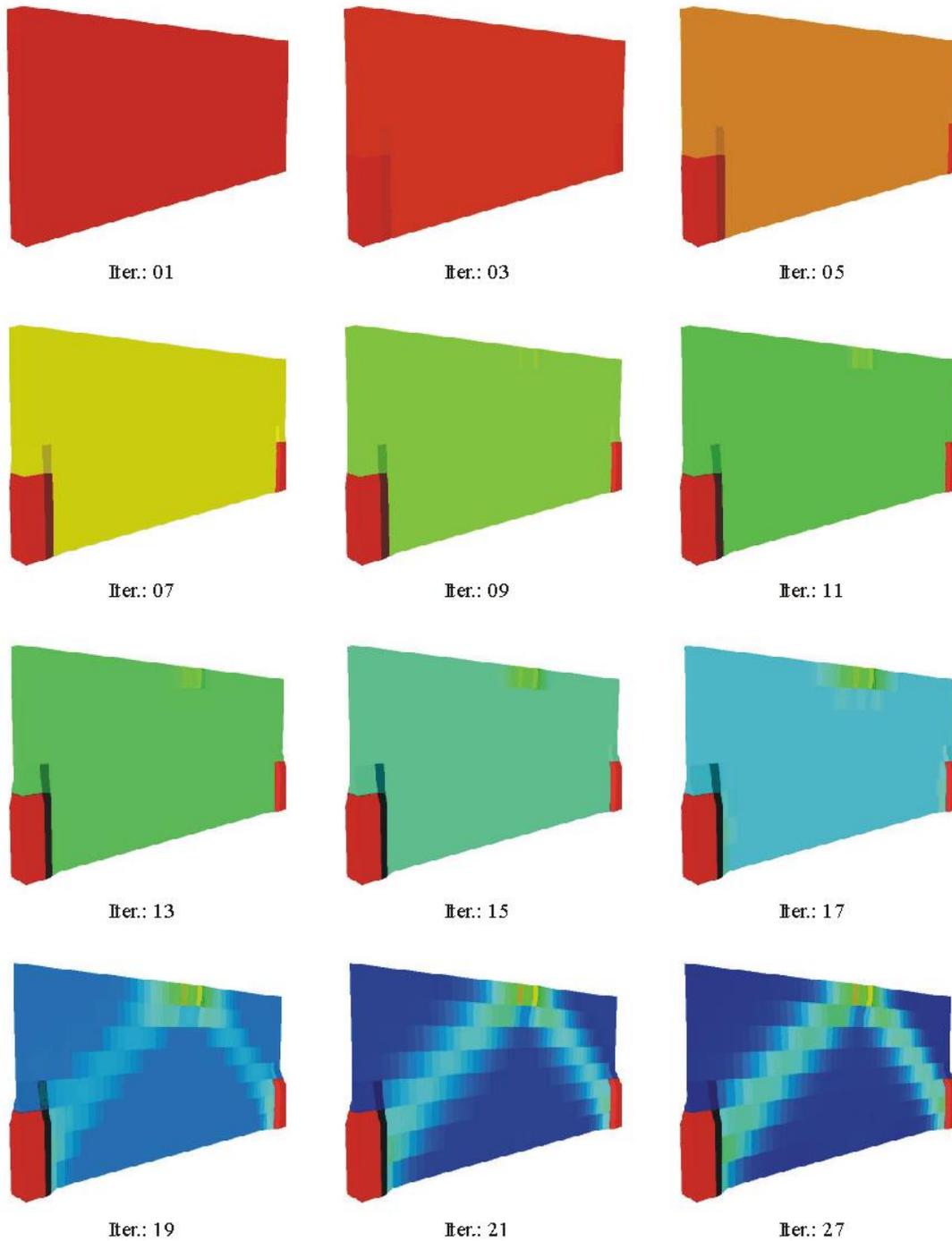


Figura 5. Optimización topológica de una estructura biapoyada con movimientos horizontales coartados y gran relación canto/luz. Carga puntual en el centro del borde superior. Formulación de mínimo peso con restricciones en tensión. (Notas: No se optimiza la zona de los apoyos; no se permite la total eliminación del material.)

(respectivamente). El recinto en el que se diseña la estructura óptima tiene ahora 32 m de longitud y 12 m de canto.

La pieza tiene también 1 m de ancho y el cálculo se realiza igualmente en tensión plana. Por simetría se analiza la mitad de la pieza. Y el dominio se discretiza en 24 elementos a lo largo y 8 según el canto, igual en los ejemplos anteriores.

En ambos casos, la estructura soporta una carga puntual (vertical y hacia abajo) de 9000 KN aplicada en el centro del borde superior. El material es ficticio con densidad  $\gamma_{mat}=7650 \text{ Kg/m}^3$  y límite elástico  $\sigma_e=8000 \text{ KN/m}^2$ . Se aplican las mismas restricciones que en los dos primeros ejemplos.

En el primer caso se obtiene claramente un arco atirantado en su parte inferior. En el segundo caso se obtiene un resultado similar, pero el tirante desaparece ya que carece de función, debido a que los movimientos horizontales están ahora coartados.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta una formulación de mínimo peso con restricciones en tensión (MPRT) para la optimización topológica de estructuras.

La formulación se ha construido a partir de un modelo de elementos finitos para problemas de elasticidad lineal con pequeños desplazamientos y pequeñas deformaciones, introduciendo las correcciones mínimas que permiten su utilización como módulo de análisis en un sistema de optimización topológica.

Esta formulación conduce a problemas de optimización más complicados y con mayores requerimientos computacionales que las formulaciones de máxima rigidez, ya que en la práctica es necesario tener en cuenta un elevado número de restricciones altamente no lineales con el fin de limitar tensiones y desplazamientos.

A cambio, el planteamiento tiene un sentido físico más claro y permite considerar múltiples estados de carga y restricciones de cualquier tipo, y la función objetivo es sencilla en general.

La formulación se ha implementado en un sistema de optimización topológica con el que se han resuelto varios ejemplos de aplicación.

Se ha comprobado que no se requieren técnicas de estabilización, ni es preciso introducir una penalización artificiosa en la función objetivo para producir resultados aceptables.

Las soluciones obtenidas parecen ser correctas, no son necesariamente asimilables a estructuras de barras y se aproximan más a lo que sugiere la intuición ingenieril que los diseños tipo estructura articulada que proporcionan normalmente las formulaciones de máxima rigidez.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la SGPIC del Ministerio de Ciencia y Tecnología del Gobierno de España (Proyecto TIC-98-0290), por la SXID de la Xunta de Galicia (Proyecto PGIDT-99MAR11801) y por la Universidad de La Coruña.

**REFERENCIAS**

- [1] L.A. Schmidt, Structural design by systematic synthesis, *Proceedings of the Second ASCE Conference on Electronic Computation*, 105–122, Pittsburgh, USA (1960).
- [2] S. Hernández, *Métodos de Diseño Óptimo de Estructuras*, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Madrid (1990).
- [3] F. Navarrina y M. Casteleiro, A general methodological analysis for optimum design, *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, **31**, 85–111 (1991).
- [4] F. Navarrina, S. López, I. Colominas, E. Bendito y M. Casteleiro, High order shape design sensitivity: A unified approach. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **188**, 681–696 (2000).
- [5] M. P. Bendsøe y N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, **71**, 197–224 (1988).
- [6] E. Ramm, S. Schwarz y R. Kemmler, Advances in structural optimization including non-linear mechanics, *Proceedings of the European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2000)* (CD-ROM, ISBN: 84-89925-70-4), European Community on Computational Methods in Applied Sciences, Barcelona (2000).
- [7] M. P. Bendsøe, *Optimization of structural topology, shape, and material*, Springer-Verlag, Heidelberg (1995).
- [8] I. Muiños, *Optimización Topológica de Estructuras: Una Formulación de Elementos Finitos para la Minimización del Peso con Restricciones en Tensión*, Proyecto Técnico, ET-SICCP, Universidad de A Coruña (2001).
- [9] M. P. Bendsøe, Variable-topology optimization: status and challenges, *Proceedings of the European Conference on Computational Mechanics ECCM'99*, W. Wunderlich (Ed.), TUM, Munich (1999).
- [10] I. Muiños, I. Colominas, F. Navarrina y M. Casteleiro, Una formulación de mínimo peso con restricciones en tensión para la optimización topológica de estructuras, *Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas* (ISBN: 84-89925-91-7), E. Oñate, F. Zárata, G. Ayala, S. Botello y M.A. Moreles (Eds.), CIMNE, Barcelona, 399–408 (2001).
- [11] T.J.R. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publishers, New York (2000).
- [12] C. Johnson, *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, New York (1990).
- [13] F. Navarrina, R. Tarrech, I. Colominas, G. Mosqueira, J. Gómez-Calviño y M. Casteleiro, An efficient MP algorithm for structural shape optimization problems, *Computer Aided Optimum Design of Structures VII* (ISBN: 1-85312-868-6), S. Hernández y C.A. Brebbia (Ed.), WIT Press, Southampton, 247–256 (2001).
- [14] Ministerio de Fomento, *NBE EA-95 Estructuras de acero en edificación*, Centro de Publicaciones del Ministerio de Fomento, Madrid (1998).