

Preprint of the paper

**"Formulaciones numéricas para el cálculo en paralelo de redes de tierra en modelos de suelo no uniformes"**

J. Gómez-Calviño, I. Colominas, F. Navarrina, M. Casteleiro (2002)

Proceedings del "V Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería" (en CD-ROM).

Madrid, España.

## FORMULACIONES NUMÉRICAS PARA EL CÁLCULO EN PARALELO DE REDES DE TIERRA EN MODELOS DE SUELO NO UNIFORMES

**J. Gómez Calviño\***, **I. Colominas\***, **F. Navarrina\*** y **M. Casteleiro\***

\* Grupo de Métodos Numéricos en Ingeniería, GMNI  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos (ETSICCP),  
Universidade da Coruña,  
Campus de Elviña, 15192, A Coruña, España  
e-mail: colominas@iccp.udc.es, web: <http://caminos.udc.es/gmni>

**Palabras clave:** BEM, Elementos de contorno, Redes de tierra, Potencial, Paralelización

**Resumen.** *En este artículo se presenta una formulación basada en el Método de Elementos de Contorno para el cálculo del potencial que adquiere el terreno cuando se produce una descarga a un sistema de toma de tierra. Se realiza el análisis para diversos modelos de terreno con dos materiales distintos, y se aplica la formulación desarrollada a un ejemplo de toma de tierra real, estudiando además el coste computacional y la paralelización del código resultante.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Se conoce por “red de tierra” al conjunto de conductores interconectados que se entierran horizontalmente bajo una gran instalación eléctrica (típicamente, una subestación de transformación) para derivar hacia el terreno la corriente eléctrica producto de un fallo. En ocasiones, la red de cables se suplementa con picas metálicas hincadas verticalmente. Su finalidad es la de garantizar la integridad de los equipos eléctricos a la vez que aseguran la continuidad del suministro de electricidad, y salvaguardar que una persona que se encuentre en las proximidades de la instalación no pueda sufrir una descarga eléctrica peligrosa. Para estos fines, la resistencia equivalente del sistema de tierras debe ser lo suficientemente baja para permitir que las corrientes de fallo se disipen principalmente en el terreno a través del sistema de tierras, en tanto que las mayores diferencias de potencial entre puntos que una persona pueda contactar deben ser inferiores a determinados límites máximos establecidos por las normativas de seguridad, tales como las tensiones “de malla”, “de paso” y “de contacto” [1, 2].

Vemos, por tanto, que la obtención de la distribución de potencial eléctrico creada en el terreno a partir de una descarga a través de la red de tierra es un problema fundamental dentro del estudio de la seguridad en la distribución de electricidad.

En los años 60 se proponen los primeros métodos para el cálculo y análisis de este tipo de instalaciones. Estaban basados en consideraciones de tipo práctico o en ideas intuitivas. El avance que supuso disponer de esas técnicas fue notable, a pesar de la constatación de numerosos inconvenientes: sus limitaciones en cuanto al número máximo de conductores de la red de tierra, su disposición y el tamaño de la instalación a proteger, los elevados requerimientos computacionales, los resultados poco realistas que se obtienen al incrementar la discretización de los electrodos, y la incertidumbre en el margen de error [1, 3].

La Teoría Electromagnética de Maxwell es la base sobre la que se puede definir completamente el problema de la disipación de corriente eléctrica en el terreno. Sin embargo, no existe solución analítica a un problema con geometría real. Por otra parte, métodos de discretización del dominio como Elementos Finitos o Diferencias Finitas conducen, debido a la geometría del problema (contornos cilíndricos de pequeño diámetro rodeadas de terreno abarcando grandes distancias), a esfuerzos de discretización y de cálculo superiores a los admisibles en el proceso de diseño ingenieril.

En los últimos años, el grupo de investigación al que pertenecen los autores del presente artículo ha desarrollado una formulación numérica basada en el Método de Elementos de Contorno para el análisis de redes de tierra con modelos de terreno isótropo y homogéneo. Ello ha permitido identificar muchos de los métodos intuitivos empleados en la práctica como casos particulares de esta formulación general [6, 7]. Así se ha podido explicar matemáticamente el comportamiento asintótico anómalo de esos métodos, se han establecido las fuentes de error y cómo subsanarlas y se han propuesto nuevas formulaciones numéricas más eficientes y precisas para la resolución de este tipo de problemas [6, 7]. Por otra parte, esta formulación se ha aplicado con éxito al análisis de tomas de tierra reales de grandes instalaciones eléctricas con un coste computacional perfectamente asumible tanto en tiempo de cálculo como de requerimientos de

memoria [6, 5]. En fechas recientes, se ha establecido una generalización de esta formulación de elementos de contorno para el análisis de redes de tierra en terrenos estratificados, tanto vertical como horizontalmente [8, 12], pudiendo resolver casos de gran interés práctico en la ingeniería eléctrica: terreno con conductividad uniforme, terreno con nivel freático a profundidad conocida, terreno con capa superior de diferente conductividad debido al relleno posterior a la colocación de la red de tierra, terreno con cambio de propiedades en planta, terreno retenido por un muro vertical, y otros.

En este artículo se expone la formulación de elementos de contorno descrita y se analiza su paralelización, ilustrando todo con la aplicación a varios casos prácticos usando la geometría de una red de tierra real.

## 2. MODELO MATEMÁTICO

### 2.1. Ecuaciones generales

Las ecuaciones del modelo matemático del problema de la disipación de corriente eléctrica en un terreno pueden ser deducidas de la Teoría del Electromagnetismo de Maxwell. Si se restringe el estudio a la obtención de la respuesta electrocinética en estado estacionario [1, 7], y se considera despreciable la resistencia eléctrica interna de los electrodos que forman la red de tierra (y en consecuencia, el potencial se asume constante en la superficie de los electrodos), las ecuaciones del modelo matemático del problema físico tridimensional vienen dadas por

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0, \quad \boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\gamma} \mathbf{grad}(V) \text{ en } E; \\ \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E &= 0 \text{ en } \Gamma_E; \quad V = V_\Gamma \text{ en } \Gamma; \quad V \rightarrow 0, \text{ si } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $E$  denota el terreno,  $\boldsymbol{\gamma}$  su tensor de conductividad,  $\Gamma_E$  la superficie del terreno,  $\mathbf{n}_E$  su versor normal unitario exterior y  $\Gamma$  la superficie de los electrodos [7].

Así, cuando el electrodo de tierra adquiere un potencial  $V_\Gamma$  (también llamada “sobretensión de tierra”), de la solución de (1) resultan el potencial  $V$  y la densidad de corriente  $\boldsymbol{\sigma}$  en cualquier punto  $\mathbf{x}$ . En particular, nos interesará la distribución de potencial en la superficie del terreno sobre la red de tierra y sus cercanías. Dadas las anteriores magnitudes, se pueden obtener la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$  que emana de un punto de la superficie de los electrodos  $\Gamma$  ( $\sigma = \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}$ , siendo  $\mathbf{n}$  el versor normal exterior a  $\Gamma$ ), la resistencia equivalente del sistema y la intensidad total de corriente [7].

El modelo de suelo más frecuentemente considerado en los métodos propuestos para análisis de redes de tierra es el de suelo homogéneo e isótropo, donde el tensor de conductividad  $\boldsymbol{\gamma}$  es sustituido por un escalar  $\gamma$ . Esta hipótesis no introduce errores significativos cuando la conductividad del terreno varía poco en las cercanías de la red de tierra o con la profundidad.

Sin embargo, cuando las propiedades eléctricas del suelo varían significativamente (por la naturaleza del material o por su humedad), se han de emplear modelos de terreno más sofisticados. Estos métodos consistirán en la simplificación de todas las variaciones de las propiedades a una clasificación del suelo por capas o estratos. Suele aceptarse que modelos de 2 capas deberían ser suficientes para modelizar casos en los que ocurra esto [1].

En concreto, los autores han desarrollado modelos de suelo estratificados en 2 capas, vertical u horizontalmente, y en los que la superficie del terreno es plana y horizontal, hecho bastante frecuente debido a la nivelación y regularización que se realiza en la fase constructiva. Estos modelos se caracterizarán por la conductividad escalar de cada una de las capas y por la posición del plano que separa ambas capas. Cuando en el modelo de 2 capas verticales se hace la conductividad de una de ellas (la que no contiene a la red de tierra) nula, se simula la presencia de un muro vertical de contención, configuración frecuente en entornos con disponibilidad de espacio reducida, como el urbano. Ver Figuras 1, 2 y 3.

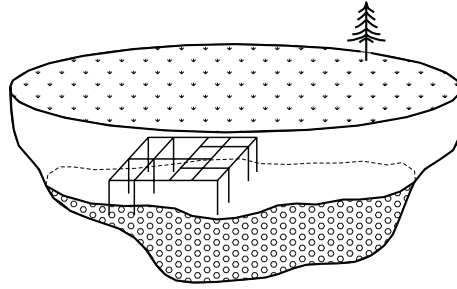


Figura 1. Modelo de suelo con dos capas horizontales

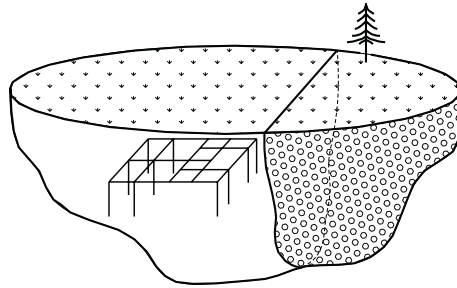


Figura 2. Modelo de suelo con dos capas verticales

Generalizando, en la hipótesis de un modelo de suelo estratificado en  $C$  capas de diferentes conductividades, el problema matemático puede ser escrito en términos del siguiente problema exterior de Neumann [8]:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}_c) &= 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_c = -\gamma_c \mathbf{grad}(V_c) \text{ in } E_c, \quad 1 \leq c \leq C; \\ \boldsymbol{\sigma}_1^t \mathbf{n}_E &= 0 \text{ in } \Gamma_E, \quad V_b = 1 \text{ in } \Gamma; \\ V_c &\rightarrow 0 \text{ if } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad \boldsymbol{\sigma}_c^t \mathbf{n}_c = \boldsymbol{\sigma}_{c+1}^t \mathbf{n}_c \text{ in } \Gamma_c, \quad 1 \leq c \leq C-1 \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $b$  denota la capa en que está embebido el electrodo,  $E_c$  es cada una de las capas de suelo,  $\gamma_c$  es su conductividad escalar,  $V_c$  es el potencial en un punto arbitrario de una capa  $E_c$ ,  $\boldsymbol{\sigma}_c$  es su correspondiente densidad de corriente,  $\Gamma_c$  es la superficie entre las capas  $E_c$  and  $E_{c+1}$ , y  $\mathbf{n}_c$  es el vector normal a  $\Gamma_c$  [8].

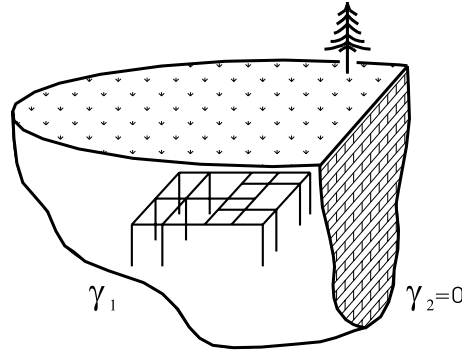


Figura 3. Modelo de suelo con muro de contención vertical

## 2.2. Expresión integral y forma variacional del problema

En la introducción se ha expuesto que la geometría de las redes de tierra (electrodos con relaciones diámetro/longitud muy pequeñas,  $\sim 10^{-3}$ ) implica serios problemas en la modelización del problema, excluyendo solución analítica y haciendo computacionalmente inviable el empleo de técnicas de discretización del dominio tridimensional como MEF o MDF.

Por estas razones, se han considerado otros métodos numéricos que sólo requieran la discretización de los contornos (en este caso, las paredes de los electrodos). Para ello es necesario en primer lugar obtener una expresión integral para el potencial  $V$  en términos de incógnitas definidas en el contorno [7].

Teniendo en cuenta los esquemas de los modelos de suelo estratificados horizontal y verticalmente (superficie del terreno horizontal, fronteras entre capas planas y paralelas o perpendiculares, respectivamente, a la superficie del terreno), la aplicación del “método de las imágenes” y de la Identidad de Green al problema (2) conduce a la siguiente expresión integral [8] para el potencial  $V_c(\mathbf{x}_c)$  en un punto arbitrario  $\mathbf{x}_c \in E_c$ , en términos de la densidad de corriente emanada  $\sigma(\boldsymbol{\xi})$  ( $\sigma = \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal exterior a  $\Gamma$ ) de cualquier punto  $\boldsymbol{\xi}$  de la superficie del electrodo  $\Gamma \subset E_b$ :

$$V_c(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{4\pi\gamma_b} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{bc}(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{x}_c \in E_c, \quad (3)$$

donde los núcleos integrales  $k_{bc}(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi})$  están formados por series de términos correspondientes a las imágenes obtenidas cuando el problema exterior de Neumann (2) es transformado en uno de Dirichlet por el citado método de las imágenes [8, 9]. El número de sumandos de estas series será finito o infinito dependiendo del modelo de suelo empleado.

Para el modelo de suelo uniforme ( $C = 1$ ), el número de sumandos es 2, ya que sólo hay una imagen de la malla original [4, 7]:

$$k_{11}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} + \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -\xi_z])}, \quad (4)$$

donde  $r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])$  indica la distancia de  $\mathbf{x}_1$  a  $\boldsymbol{\xi} \equiv [\xi_x, \xi_y, \xi_z]$ , siendo el punto  $[\xi_x, \xi_y, -\xi_z]$  el simétrico de  $\boldsymbol{\xi}$  con respecto a la superficie del terreno  $\Gamma_E$ . Se asume que el origen de coordenadas

está en la superficie del terreno y el eje  $z$  es perpendicular a  $\Gamma_E$ .

Para el modelo de suelo de dos capas verticales (Figura 2), el número de sumandos de las series es 4 ó 2, según la capa en la que se encuentre el punto de evaluación del potencial:

$$\begin{aligned}
k_{11}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} + \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -\xi_z])} \\
&\quad + \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, -\xi_y, \xi_z])} + \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, -\xi_y, -\xi_z])}; \\
k_{12}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1 + \kappa}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} + \frac{1 + \kappa}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, -\xi_z])}
\end{aligned} \tag{5}$$

donde  $r(\mathbf{x}, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])$  indica la distancia de  $\mathbf{x}$  a  $\boldsymbol{\xi}$ . Los otros términos corresponden a las distancias de  $\mathbf{x}$  al punto simétrico de  $\boldsymbol{\xi}$  con respecto a la superficie del terreno  $\Gamma_E$ , y a las imágenes de éstos con respecto a la frontera vertical entre las capas. Se asume de nuevo que el origen de coordenadas está en la superficie del terreno y sobre la frontera vertical, y que el eje  $z$  y el eje  $y$  son perpendiculares a  $\Gamma_E$  y a  $\Gamma_1$  respectivamente. El cociente  $\kappa$  se define a partir de las conductividades de las capas:

$$\kappa = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} \tag{6}$$

Para el modelo de suelo de dos capas horizontales (Figura 1), el número de sumandos de las series es infinito:

$$\begin{aligned}
k_{11}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, 2iH + \xi_z])} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, 2iH - \xi_z])} \\
&\quad + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -2iH + \xi_z])} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -2iH - \xi_z])}; \\
k_{12}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 + \kappa)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, -2iH + \xi_z])} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 + \kappa)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, -2iH - \xi_z])}; \\
k_{21}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 - \kappa)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -2iH + \xi_z])} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 - \kappa)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, 2iH - \xi_z])}; \\
k_{22}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} - \frac{\kappa}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, 2H + \xi_z])} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(1 - \kappa^2)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, -2iH + \xi_z])}
\end{aligned} \tag{7}$$

donde  $r(\mathbf{x}, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])$  indica la distancia de  $\mathbf{x}$  a  $\boldsymbol{\xi}$ . Los otros términos corresponden a las distan-

cias de  $\mathbf{x}$  al punto simétrico de  $\boldsymbol{\xi}$  con respecto a la superficie del terreno  $\Gamma_E$  y a la frontera entre las capas.  $H$  es el espesor de la capa superior, y  $\kappa$  viene dado por (6). Una vez más se asume que el origen de coordenadas está sobre la superficie del terreno y que el eje  $z$  es perpendicular a  $\Gamma_E$ .

Por último, para el modelo de suelo con muro de contención vertical, el núcleo es un caso particular de (5) cuando  $\kappa = 1$ , con lo que:

$$k_{11}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} + \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -\xi_z])} \\ + \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, -\xi_y, \xi_z])} + \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, -\xi_y, -\xi_z])} \quad (8)$$

donde  $r(\mathbf{x}, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])$  indica la distancia de  $\mathbf{x}$  a  $\boldsymbol{\xi}$ . El resto de los términos corresponden a las distancias de  $\mathbf{x}$  al punto simétrico de  $\boldsymbol{\xi}$  con respecto a la superficie del terreno  $\Gamma_E$ , y a las imágenes resultantes con respecto al muro. El origen de coordenadas está en la superficie del terreno y sobre el muro, y el eje  $z$  y el eje  $y$  son perpendiculares a  $\Gamma_E$  y a  $\Gamma_1$  respectivamente. En este modelo de suelo, calcular el potencial  $V_2(\mathbf{x}_2)$ , para lo que se necesitaría el núcleo  $k_{12}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi})$ , no tiene sentido.

De las expresiones (4), (5), (7) y (8) de los núcleos, podemos deducir una expresión para un núcleo  $k_{bc}(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi})$  en general:

$$k_{bc}(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=0}^{l_k} k_{bc}^l(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi}), \quad k_{bc}^l(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi}) = \frac{\psi^l(\kappa)}{r(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi}^l(\boldsymbol{\xi}))}, \quad (9)$$

donde  $\psi^l$  es un coeficiente de ponderación que depende sólo del cociente  $\kappa$  dado por (6), y  $r(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi}^l(\boldsymbol{\xi}))$  es la distancia euclídea entre los punto  $\mathbf{x}_c$  y  $\boldsymbol{\xi}^l$ , siendo  $\boldsymbol{\xi}^0$  el punto  $\boldsymbol{\xi}$  sobre la superficie del electrodo ( $\boldsymbol{\xi}^0(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\xi}$ ), y siendo  $\boldsymbol{\xi}^l$  ( $l \neq 0$ ) las imágenes de  $\boldsymbol{\xi}$  con respecto a la superficie del terreno y a las fronteras entre capas [8, 9]. Finalmente,  $l_k$  es el número de sumandos de las series de núcleos integrales, que depende del modelo de suelo analizado, según se ha explicado.

Con la expresión (3) se puede calcular el potencial eléctrico en un punto arbitrario  $\mathbf{x}_c$  si se conoce la densidad de corriente emanada de los electrodos,  $\sigma$ . Y también partiendo del conocimiento de  $\sigma$  se puede calcular la corriente total emanada de la red de tierra, su resistencia equivalente y la mayoría de los parámetros de seguridad que se han descrito [7].

Pues bien, la densidad de corriente emanada de los electrodos,  $\sigma$ , se puede obtener resolviendo la siguiente ecuación integral de Fredholm de primera especie sobre  $\Gamma$ :

$$\frac{1}{4\pi\gamma_b} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{bb}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma = 1, \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma, \quad (10)$$

ya que la expresión integral para el potencial (3) también se debe satisfacer en la superficie de los electrodos  $\Gamma$ , donde el valor del potencial viene impuesto por la condición de contorno  $V_b(\boldsymbol{\chi}) = 1, \forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma$ .

La forma variacional de esta ecuación integral se puede obtener imponiendo que se verifique



en la forma de residuos ponderados, lo que conduce a la siguiente identidad integral:

$$\iint_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma} w(\boldsymbol{\chi}) \left( \frac{1}{4\pi\gamma_b} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{bb}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma - 1 \right) d\Gamma = 0, \quad (11)$$

que debe verificarse para todos los miembros  $w(\boldsymbol{\chi})$  de una determinada clase de funciones de test definidas en  $\Gamma$  [4, 7].

Dado que la incógnita del problema,  $\sigma$ , está definida en el contorno del dominio, y no en puntos del dominio tridimensional, parece obvio que una formulación basada en el Método de Elementos de Contorno será la mejor elección para resolver esta forma variacional [7, 10].

### 3. FORMULACIÓN NUMÉRICA BEM

#### 3.1. Modelización general bidimensional

El punto de partida del desarrollo de la formulación numérica BEM lo constituye la discretización de la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$  y la superficie de los electrodos  $\Gamma$ , dados un conjunto de  $\mathcal{N}$  funciones de prueba  $\{N_i(\boldsymbol{\xi})\}$  definidas en  $\Gamma$  y un conjunto de  $\mathcal{M}$  elementos de contorno 2D  $\{\Gamma^\alpha\}$ :

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i N_i(\boldsymbol{\xi}), \quad \Gamma = \bigcup_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} \Gamma^\alpha, \quad (12)$$

Con esto, es posible discretizar la expresión integral (3) para el potencial  $V_c(\mathbf{x}_c)$ :

$$V_c(\mathbf{x}_c) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i V_{c,i}(\mathbf{x}_c); \quad V_{c,i}(\mathbf{x}_c) = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} \sum_{l=0}^{l_v} V_{c,i}^{\alpha l}(\mathbf{x}_c); \quad (13)$$

$$V_{c,i}^{\alpha l}(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{4\pi\gamma_b} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma^\alpha} k_{bc}^l(\mathbf{x}_c, \boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma^\alpha, \quad (14)$$

donde  $l_v$  representa el número de sumandos a considerar en la evaluación de las series de núcleos hasta que se haya alcanzado la convergencia ( $l_v = l_k$  si este número era finito).

Finalmente, la forma variacional (11) se reduce al siguiente sistema de ecuaciones lineales para una conjunto dado de  $\mathcal{N}$  funciones de test  $\{w_j(\boldsymbol{\chi})\}$  definido en  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} R_{ji} \sigma_i &= \nu_j \quad (j = 1, \dots, \mathcal{N}) \\ R_{ji} &= \sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} \sum_{l=0}^{l_R} R_{ji}^{\beta\alpha l}, \quad \nu_j = \sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \nu_j^\beta, \end{aligned} \quad (15)$$

siendo

$$R_{ji}^{\beta\alpha l} = \frac{1}{4\pi\gamma_b} \iint_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma^\beta} w_j(\boldsymbol{\chi}) \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma^\alpha} k_{bb}^l(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma^\alpha d\Gamma^\beta, \quad (16)$$

$$\nu_j^\beta = \iint_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma^\beta} w_j(\boldsymbol{\chi}) d\Gamma^\beta, \quad (17)$$

donde  $l_R$  representa el número de sumandos a considerar en la evaluación de las series de núcleos hasta que se haya alcanzado la convergencia ( $l_R = l_k$  si este número era finito).

La resolución del sistema de ecuaciones (15) proporciona los valores de las densidades de corriente  $\sigma_i$  ( $i = 1, \dots, \mathcal{N}$ ) que emanan de los nodos de la malla.

Pero en la práctica la discretización 2D que se requiere para resolver las ecuaciones expuestas implica para problemas reales un número enorme de grados de libertad. Además, la matriz de coeficientes en (15) es llena, y el cálculo de cada contribución (16) a sus elementos requiere doble integración en un dominio bidimensional [7] y, en el caso de núcleos dados por series de infinitos sumandos, un altísimo número de evaluaciones de éstos. Por estas razones, es necesario introducir simplificaciones en esta modelización numérica BEM.

### 3.2. Modelización aproximada unidimensional

En los últimos años, los autores han propuesto una formulación numérica de elementos de contorno 1D (“BEM1D”), resultante de asumir que la densidad de corriente es uniforme a lo largo del perímetro de la sección transversal de los conductores y no tener en cuenta los efectos de disipación de corriente en los extremos y uniones entre los conductores de la red de tierra.

Con estas aproximaciones, las expresiones que definen la discretización y el cálculo de la densidad de corriente emanada y del potencial aproximado en un punto cualquiera resultan:

$$\hat{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i \hat{N}_i(\hat{\boldsymbol{\xi}}), \quad L = \bigcup_{\alpha=1}^m L^\alpha, \quad (18)$$

$$\hat{V}_c(\mathbf{x}_c) = \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i \hat{V}_{c,i}(\mathbf{x}_c); \quad \hat{V}_{c,i}(\mathbf{x}_c) = \sum_{\alpha=1}^m \sum_{l=0}^{l_V} \hat{V}_{c,i}^{\alpha l}(\mathbf{x}_c); \quad (19)$$

$$\hat{V}_{c,i}^{\alpha l}(\mathbf{x}_c) = \frac{1}{4\gamma_b} \int_{\hat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \phi(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{k}_{bc}^l(\mathbf{x}_c, \hat{\boldsymbol{\xi}}) \hat{N}_i(\hat{\boldsymbol{\xi}}) dL^\alpha, \quad (20)$$

y para ello, las intensidades nodales son calculadas a partir del sistema de ecuaciones lineales:

$$\sum_{i=1}^n \hat{R}_{ji} \hat{\sigma}_i = \hat{v}_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

$$\hat{R}_{ji} = \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m \sum_{l=0}^{l_R} \hat{R}_{ji}^{\beta\alpha l}, \quad \hat{v}_j = \sum_{\beta=1}^m \hat{v}_j^\beta, \quad (21)$$

donde

$$\hat{R}_{ji}^{\beta\alpha l} = \frac{1}{4\gamma_b} \int_{\hat{\boldsymbol{\chi}} \in L^\beta} \phi(\hat{\boldsymbol{\chi}}) \hat{w}_j(\hat{\boldsymbol{\chi}}) \int_{\hat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \phi(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \mathbf{k}_{bb}^l(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) \hat{N}_i(\hat{\boldsymbol{\xi}}) dL^\alpha dL^\beta, \quad (22)$$

$$\widehat{v}_j^\beta = \int_{\widehat{\chi} \in L^\beta} \phi(\widehat{\chi}) \widehat{w}_j(\widehat{\chi}) dL^\beta. \quad (23)$$

Para reducir aún más el tiempo de computación, se ha propuesto aproximar las distancias que intervienen en los núcleos integrales en términos de las distancias entre las proyecciones de los puntos sobre el eje de los electrodos. De hecho esta hipótesis es consecuencia de integrar mediante una cuadratura de Newton-Cotes las integrales circunferenciales que se obtienen al introducir la hipótesis de uniformidad circunferencial de la densidad de corriente de pérdida [6, 7]. Tras la aplicación de estas hipótesis, el cálculo de los coeficientes de la matriz del sistema resultante requiere ahora integrar dos veces en dominios unidimensionales (los ejes de los electrodos), siendo el número total de grados de libertad mucho menor que en el modelo 2D. Además, el grupo de investigación al que pertenecen los autores del presente artículo ha desarrollado el cálculo analítico de las integrales que intervienen en esta formulación, reduciendo así aún más el esfuerzo computacional necesario [6].

La diferente selección de tipos de funciones de prueba y de test en el planteamiento numérico 1D permite desarrollar formulaciones específicas, e identificar los métodos intuitivos y de tipo práctico empleados en el cálculo de tierras como casos particulares de la formulación general de elementos de contorno, con lo que es posible explicar desde un punto de vista matemáticamente riguroso los problemas encontrados con la aplicación de estos métodos [6]. El resultado es una formulación numérica rigurosa y bien fundamentada con unos requisitos computacionales perfectamente asequibles, tanto en tiempo de computación como en memoria, para el análisis y diseño de sistemas de puesta a tierra de grandes instalaciones eléctricas [6, 7, 5].

En las secciones siguientes presentamos ejemplos de aplicación de la formulación expuesta, aplicada al análisis de un sistema de toma de tierra real. Se analizará asimismo su coste computacional, su implementación y la necesidad de la paralelización del código.

## 4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN BEM PROPUESTA

### 4.1. Toma de tierra y modelos de suelo analizados

La formulación numérica BEM descrita se ha implementado en un sistema de Diseño Asistido por Ordenador programado en lenguaje Fortran [5]. Con este sistema se pueden analizar todos los modelos de suelo descritos, lo cual se ha ilustrado con un ejemplo de todos ellos. Se está trabajando en la ampliación de la formulación para poder tratar modelos de suelo geométricamente más complejos, con lo que se podrán aproximar prácticamente todos los casos que se dan en la práctica real del diseño de tomas de tierra para grandes instalaciones.

El ejemplo que se analizará consiste en la aplicación de la formulación BEM descrita, haciendo uso de la geometría real de una malla de toma de tierra: la de la subestación Santiago, en la ciudad de Santiago de Compostela (ver Figura 4). Esta toma de tierra está constituida por 534 conductores cilíndricos de 11.28 mm de diámetro enterrados a una profundidad de 0.75 m, complementados por 24 picas verticales de 4 m de longitud y 15.00 mm de diámetro, que ayudarán a proteger eléctricamente las partes más delicadas de la instalación. El área cubierta

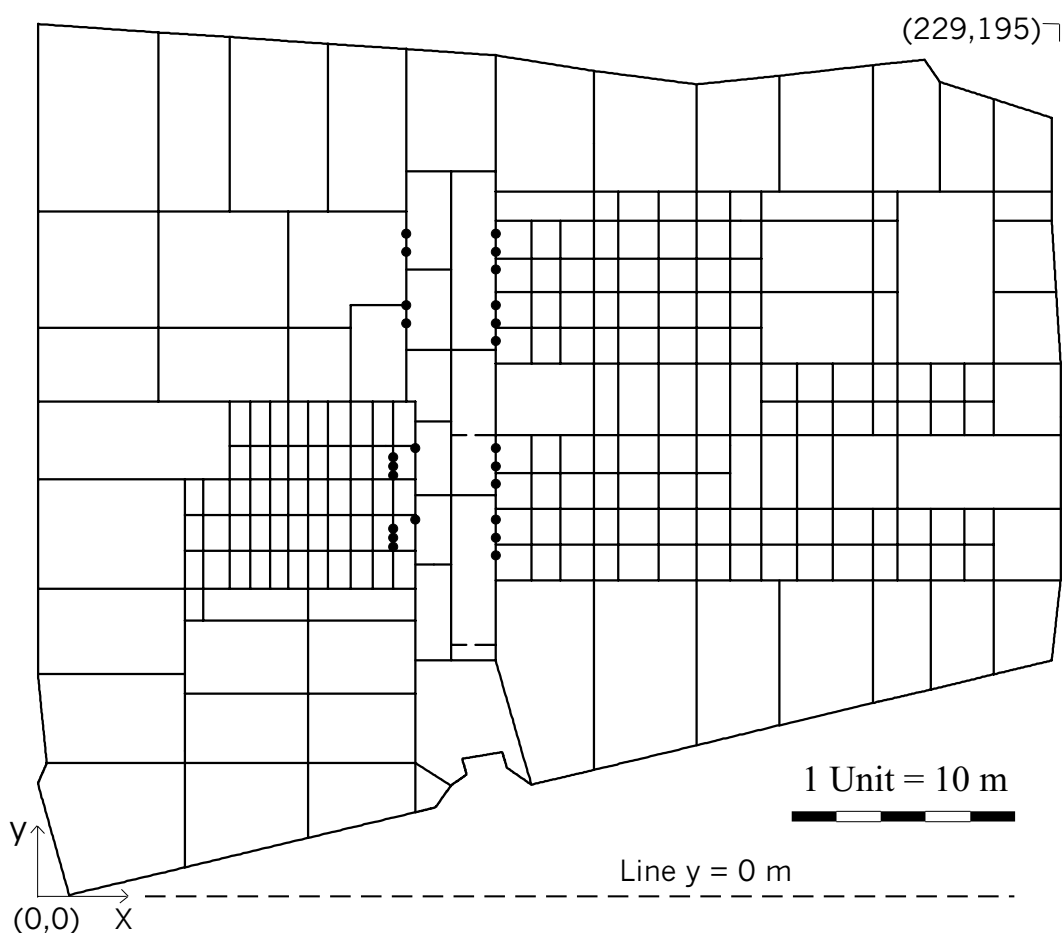


Figura 4. Toma de tierra de la subestación de Santiago (los puntos negros localizan las picas verticales)

por la malla es de unos  $38,000 \text{ m}^2$ , y el área estudiada a efectos de cálculo de potenciales será de unos  $80,000 \text{ m}^2$ . Se ha considerado una Sobretensión de Tierra (voltaje de la descarga frente a la referencia o “cero” del infinito) de  $10 \text{ kV}$ .

La elección de las funciones de test y de prueba se ha realizado según formulación tipo Galerkin. Las picas se han partido todas a cota  $-1.00 \text{ m}$ , para permitir aplicar el modelo de cálculo de 2 capas horizontales, donde la frontera se ha puesto a esa cota; con esto, cada fragmento resultante de pica, y cada tramo de conductor horizontal, se han discretizado en 1 elemento lineal de emanación de corriente, lo cual ha resultado en un modelo con 386 grados de libertad.

Los 4 modelos de suelo presentados se concretan en el presente ejemplo de aplicación como sigue:

- Modelo A: suelo homogéneo de conductividad  $\gamma = 1 \cdot 10^{-2}(\Omega m)^{-1}$ , correspondiente, por ejemplo, a un terreno compuesto uniformemente por arcilla.
- Modelo B: suelo con 2 capas horizontales, de conductividad  $\gamma_1 = 5 \cdot 10^{-4}(\Omega m)^{-1}$  para la capa superior, de  $1 \text{ m}$  de espesor, en la que se encuentran embebidos los electrodos de

la malla y la parte superior de las picas, y correspondiente a un material poco conductivo como la grava o el hormigón; y de conductividad  $\gamma_2 = 1 \cdot 10^{-2}(\Omega m)^{-1}$  para la capa inferior, en la que se encuentran embebidas las partes inferiores de las picas, para así evacuar corriente a este estrato más conductivo, correspondiente, por ejemplo, a un terreno arcilloso.

- Modelo C: suelo con 2 capas verticales, de conductividad  $\gamma_1 = 1 \cdot 10^{-2}(\Omega m)^{-1}$  para la capa en la que se encuentra la malla, que llega hasta la línea  $y = 0 \text{ m}$  señalada en la Figura 4; y de conductividad  $\gamma_2 = 5 \cdot 10^{-4}(\Omega m)^{-1}$  para la otra capa.
- Modelo D: suelo de conductividad  $\gamma_1 = 1 \cdot 10^{-2}(\Omega m)^{-1}$ , conteniendo a la malla, y retenido por un muro vertical coincidente con la línea  $y = 0 \text{ m}$  señalada en la Figura 4; con lo cual la conductividad de la otra “capa” ha de imponerse nula, representando al aire, aislante.

#### 4.2. Resultados obtenidos

Los resultados de Resistencia Equivalente del Terreno, Corriente Total Emanada y Tiempo de Cálculo obtenidos tras la aplicación de la formulación BEM descrita a los 4 modelos elegidos se detallan en la tabla 1. El ordenador usado para el cálculo se describe en el apartado siguiente.

Modelo de suelo	Resistencia equiv. ( $\Omega$ )	Corriente emanada (kA)	Tiempo de CPU (s)
A	0.2462	40.61	19.29
B	0.4837	20.68	3302.88
C	0.3139	31.85	36.85
D	0.3207	31.18	36.66

Tabla 1. Resumen de resultados numéricos para los 4 modelos de suelo en la toma de tierra Santiago

En la Figura 5 se pueden ver las distribuciones de potencial en la superficie del terreno resultantes para cada uno de los modelos de terreno. Las gráficas muestran líneas de isopotencial, gracias al cálculo del potencial en 20,305 puntos de la superficie del terreno. Como se puede observar, los resultados de cada modelo son muy diferentes, tanto en niveles de potencial en superficie como en gradientes de potencial, lo cual es más interesante a efectos de seguridad.

En el modelo B se aprecia en el nivel general de potencial la influencia de la capa superior, muy poco conductiva. En los modelos C y D la influencia de la capa menos conductiva al sur de la malla, o del aire aislante, respectivamente, se aprecia especialmente en las cercanías de la frontera vertical (línea  $y = 0 \text{ m}$ ).

De estas diferencias en los resultados se concluye que el uso de un modelo de suelo uniforme no es suficiente para aproximar los casos que se dan en la realidad, especialmente cuando hay diferencias de conductividad considerables en los materiales circundantes. En estos casos resulta necesario usar modelos de terreno más complejos, como los descritos en este artículo, o incluso de mayor complejidad.

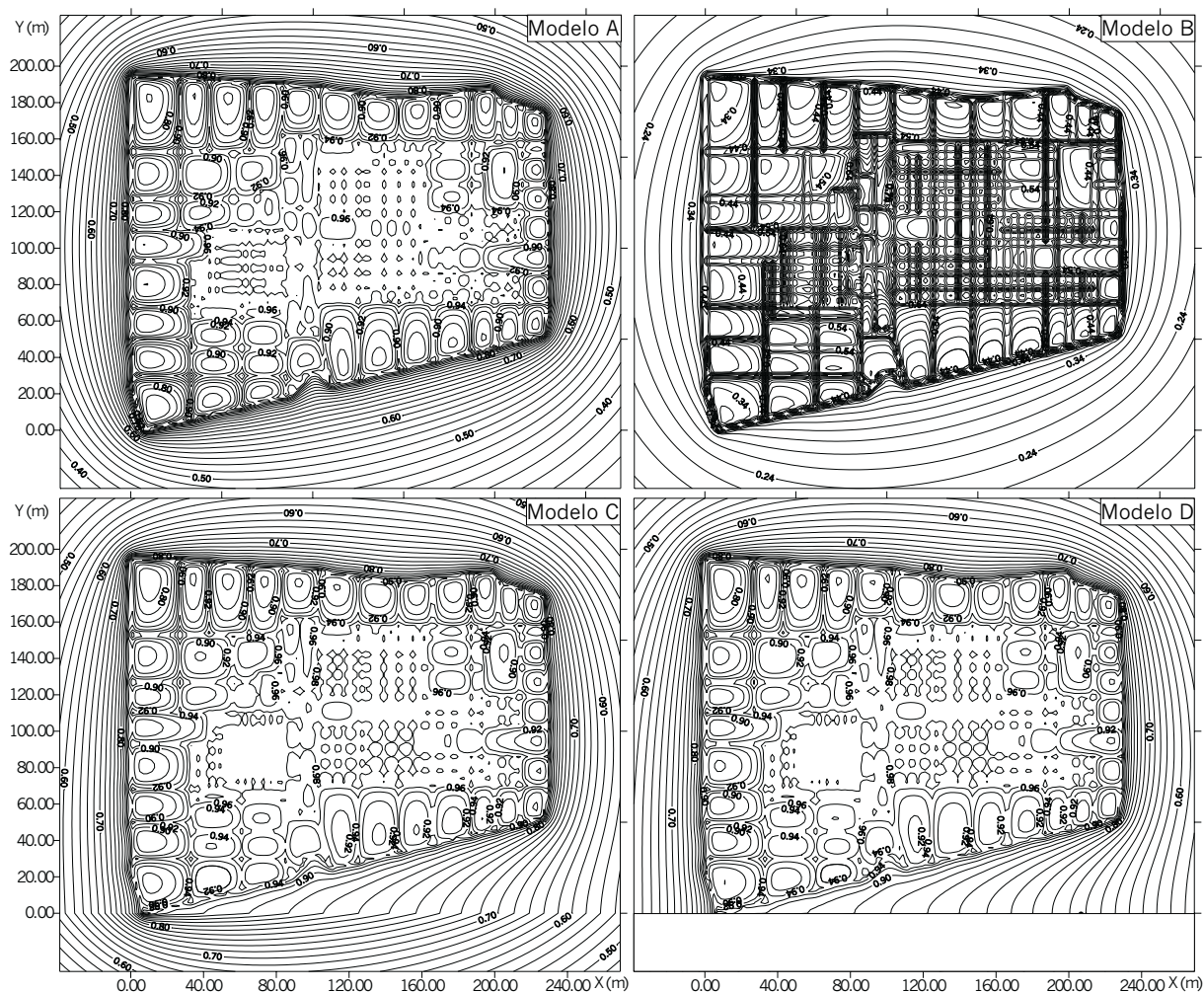


Figura 5. Potencial (normalizado a 1 V) en la superficie del terreno para los 4 modelos estudiados: modelo A (uniforme), modelo B (2 capas horizontales), modelo C (2 capas verticales, donde se puede apreciar cómo las líneas de corriente, perpendiculares a las de isopotencial, se refractan al cambiar de medio), modelo D (muro de contención vertical, donde se puede apreciar cómo las líneas de isopotencial son perpendiculares a la superficie del muro)

## 5. PARALELIZACIÓN DEL CÓDIGO

### 5.1. Ordenador paralelo y costes computacionales

Los cálculos anteriores, y los que se describirán en el presente apartado, se han realizado sobre un ordenador *Origin 2000 Silicon Graphics* perteneciente al *Centro Europeo de Paralelismo de Barcelona (CEPBA)*. Éste es un ordenador paralelo con 64 procesadores *MIPS R10000* a 250 Mhz. Su rendimiento de pico es de 32 GFlop. Internamente, los procesadores se emparejan en clústers, compartiendo 256 Mbyte de memoria, y además cada procesador tiene 4 Mbyte de memoria caché. Los clústers se organizan en una red hipercúbica, a través de la cual cada

procesador puede acceder a toda la memoria, con lo que el ordenador puede ser programado teniendo en cuenta una memoria compartida de 8 Gbyte. Los dispositivos de entrada y salida tienen una capacidad de 1.2 Gbyte/s.

Como hemos explicado, los propuestos para la toma de tierra Santiago son buenos ejemplos de cálculo de instalaciones reales en condiciones que frecuentemente aparecen en la práctica. En la tabla 1 se puede observar que los tiempos de computación medidos para el cálculo de los modelos A, C y D son menores que un minuto, lo cual permite el diseño en tiempo real. Sin embargo, el modelo B tarda un tiempo del orden de las horas, y esto ya no permite diseñar en tiempo real. La causa de esto es que los núcleos integrales para el modelo de 2 capas horizontales no tienen 2 ni 4 sumandos, como ocurría en los otros modelos estudiados, sino un número infinito de ellos, por lo cual puede ser necesario realizar sumas de grandes números de sumandos para alcanzar la convergencia de estas series, dependiendo de la relación entre las resistividades  $\rho$ .

Observemos el coste computacional de la formulación propuesta, cuando se han definido  $m$  elementos de  $p$  nodos cada uno, y hay un total de  $n$  grados de libertad [11]:

- La generación de la matriz del sistema, que tendrá  $n^2$  elementos y será simétrica, requiere  $O(n^2 p^2 / 2)$  operaciones, cada una de las cuales implica el cálculo de un núcleo integral: por esta razón los cálculos con modelo de 2 capas horizontales, en los que cada núcleo tiene un número infinito de sumandos, son mucho más costosos.
- La resolución del sistema de ecuaciones lineales requeriría por un método directo  $O(n^3 / 3)$  operaciones, lo cual sería inabordable para problemas grandes; por esto se emplea el algoritmo semiiterativo de gradientes conjugados, que resulta muy eficiente para este caso, consumiendo tiempos de computación mucho más bajos que los de la generación de la matriz.
- El coste de calcular la corriente emanada total y la resistencia equivalente, una vez que del sistema de ecuaciones hemos extraído las intensidades de corriente nodales, es despreciable frente a los tiempos anteriores.
- El coste de calcular, dados los resultados anteriores, el potencial en un punto dado del terreno, es  $O(mp)$ ; por ello estos cálculos, llamados de posproceso, consumen un tiempo considerable si se calcula el potencial en un gran número de puntos, como por ejemplo ocurre cuando se quieren dibujar gráficos de líneas de isopotencial en superficie.

De esto se deduce que la parte que consume más tiempo de todo el proceso de cálculo es la generación de la matriz del sistema, seguido por el posproceso si el número de puntos en que queremos calcular el potencial es grande. Como prueba de esto, se ha comprobado para el ejemplo de Santiago con el modelo de suelo B que, dentro del proceso previo a los cálculos de potencial en puntos de la superficie, la generación de la matriz consume el 99.948 % del tiempo de cálculo, mientras que la resolución del sistema sólo consume el 0.012 %.

Tanto la generación de la matriz como el posproceso son susceptibles de paralelización, asunto que se trata en el siguiente subapartado.

## 5.2. Paralelización del código

Los tiempos de proceso para modelos de terreno con 2 materiales con frontera entre ellos no vertical resultan inadmisibles debido netamente al tiempo de generación de la matriz del sistema, como se ha detallado. Lo mismo puede ocurrirle al posproceso si se calcula el potencial en muchos puntos.

La paralelización de códigos de cálculo consiste en la modificación de dichos códigos para la utilización simultánea de varios procesadores. Esto sólo generará los mismos resultados que el programa secuencial si realmente varios procesadores pueden encargarse de varias tareas que sean independientes entre sí, para después unir todos sus resultados y continuar con el programa.

Para la paralelización del código se ha decidido usar las directivas OpenMP, por varias razones: *a)* se dispone de un ordenador de memoria compartida, necesario para paralelizar por directivas, *b)* las directivas proporcionan una forma limpia y clara de codificar que facilitan la revisión del código en el futuro, *c)* las directivas OpenMP aseguran la portabilidad del código paralelo a un ordenador de memoria compartida distinto, *d)* el código presente es transformable de modo que las directivas proporcionen una paralelización correcta.

El posproceso es un claro ejemplo de algoritmo paralelizable: basta con adjudicar a cada procesador disponible un conjunto de los puntos en que queremos calcular el potencial (que, en los ejemplos mostrados, eran 20,305), ya que el resultado de unos es independiente del de los otros. La paralelización de este algoritmo está siendo llevada a cabo en estos momentos.

El cálculo de la matriz del sistema también es paralelizable: consiste, como se ve en (21), en el emparejamiento de cada elemento con cada uno de los otros ( $m(m+1)/2$  ciclos), obteniendo de cada uno una matriz elemental que es ensamblada inmediatamente en la matriz del sistema. Estos ciclos no se pueden repartir directamente entre los procesadores, porque todos usarían las mismas posiciones de memoria para el almacenamiento de la matriz elemental: esto nos obliga a almacenar en memoria todas las matrices elementales y realizar el ensamblaje fuera del conjunto de los  $m(m+1)/2$  ciclos. Ahora sí es paralelizable ese conjunto, realizándose posteriormente el ensamblaje, que consume poco tiempo, en modo secuencial. De este modo, la memoria necesaria para el programa es aproximadamente el doble que en la versión secuencial, pero la memoria no es un factor limitante en este tipo de problemas.

Entonces, el algoritmo a paralelizar será el doble bucle que calcula las matrices elementales resultado de emparejar cada elemento con los otros. Dentro de este doble bucle, podremos paralelizar el exterior (repartiendo entre los procesadores las “columnas” del triángulo de emparejamientos entre elementos) o el interior (repartiendo entre los procesadores los emparejamientos de cada una de dichas columnas). La Figura 6 muestra los “speed-up” o factores de reducción en el tiempo de computación obtenidos paralelizando el bucle exterior y paralelizando el interior, para el modelo de 2 capas horizontales y usando la opción de “schedule” “dynamic 1” (ver más abajo). Los resultados de speed-up resultan mejores al paralelizar el bucle exterior (speed-up muy próximos al número de procesadores), y hay más diferencia cuanto mayor es el número de procesadores empleados. La razón de este fenómeno es que la granularidad es mayor paralelizando el bucle exterior: hay que realizar menos trabajo de gestión para repartir trabajo entre los



procesadores porque sólo se reparten las  $m$  columnas del triángulo descrito más arriba, en lugar de los elementos de cada una de las columnas.

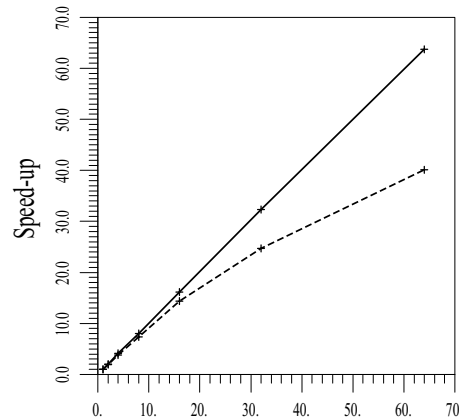


Figura 6. Speed-up obtenido paralelizando el bucle exterior (línea continua) y el interior (discontinua), según el número de procesadores empleado

Así pues, los ciclos a repartir deben ser las columnas del triángulo de emparejamientos entre elementos. Al tener estas columnas tamaño linealmente variable (de 1 a  $m$  filas), el modo en que se repartan entre los procesadores disponibles resulta muy influyente en el speed-up conseguido. Este modo de reparto se controla con la variable de paralelización “schedule” de las directivas OpenMP, obteniéndose los siguientes resultados [11] con cada una de las opciones posibles:

- La opción “static”, que reparte los ciclos en lotes iguales entre los procesadores, da muy malos resultados cuando el parámetro “chunk” (tamaño del lote, con reparto inicial uniforme por defecto) es grande, debido a que los tamaños de los ciclos (columnas de triángulos descritos) son linealmente decrecientes.
- La opción “dynamic”, que hace tomar a cada procesador un nuevo lote de ciclos cuando ha acabado con el anterior, sin tener que esperar a que todos terminen, mejora sensiblemente los speed-up obtenidos con la opción “static”. Con un “chunk” de una sola columna, se consigue que nunca un procesador esté parado, mientras queden columnas por procesar; por otra parte, el trabajo de gestión de reparto es máximo: sin embargo, ésta es la opción que proporciona los mejores resultados.
- La opción “guided”, que reparte los ciclos en lotes de tamaño exponencialmente variable entre los procesadores, proporciona resultados próximos a los dados por “dynamic”, cuando se usan “chunk” bajos.

Se concluye que conviene paralelizar el bucle exterior con opción de “schedule” “dynamic” y con “chunk” bajo, especialmente cuando el número de procesadores es alto, para evitar que algunos de ellos se queden sin trabajo antes de agotar todos los ciclos [11].

En la tabla 2 se pueden ver los tiempos obtenidos para el cálculo de la matriz del sistema para el modelo B del ejemplo, paralelizando el bucle exterior, usando la opción de “schedule”

“dynamic” con “chunk”=1, y distintos números de procesadores (1 procesador representa la versión secuencial), así como el speed-up resultante. Los tiempos expuestos son los menores obtenidos de 4 ejecuciones distintas (en todo caso, resultan muy semejantes en las 4).

Nº de procesadores	Tiempo de CPU para matriz (s)	Speed-up
1	3301.17	1.000
2	1644.97	2.007
4	824.27	4.005
8	418.38	7.890

Tabla 2. Tiempos de cálculo de la matriz del sistema y sus speed-up, para el modelo B, paralelizando el bucle exterior, con “schedule”=“dynamic” y “chunk”=1

Como se ve, se ha conseguido realizar en paralelo el 99.948 % del trabajo, repartido éste en sólo 582 ciclos, obteniendo con ello speed-up casi iguales al número de procesadores (el que sean ligeramente superiores en algún caso se debe a la optimización introducida por el compilador con opciones de paralelización), con lo que se confirma el alto rendimiento del modo de paralelización descrito.

## 6. CONCLUSIONES

Los autores presentan una generalización de la formulación de Elementos de Contorno para el cálculo de redes de tierra desarrollada por el grupo de investigación al que pertenecen, con la que se pueden calcular sistemas embebidos en suelos estratificados vertical u horizontalmente.

Aplicando esta formulación a una red de tierra real y usando diferentes modelos de terreno uniforme y estratificado, se ha demostrado que los resultados de valor y gradiente de potencial pueden variar considerablemente según el modelo empleado, aconsejándose con esto, para la mejora de la seguridad en estas instalaciones, su cálculo usando modelos de suelo que admitan estratificación, aunque supongan un mayor coste computacional.

Este coste, además, se ha reducido sensiblemente mediante la paralelización del código, obteniendo tiempos de computación más próximos al diseño en tiempo real.

## 7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por el *Ministerio de Ciencia y Tecnología* español (proyectos #1FD97-0108 y #DPI2001-0556), así como por la *Secretaría Xeral de I+D* de la *Xunta de Galicia* y por la *Universidad de La Coruña*, mediante proyectos y becas de investigación, y con la colaboración del *Centro Europeo de Paralelismo de Barcelona (CEPBA)*.

## REFERENCIAS

- [1] IEEE Std.80, *IEEE Guide for safety in AC substation grounding*, New York, 2000.
- [2] Sverak J.G., *Progress in Step and Touch Voltage Equations of ANSI/IEEE Std.80*, IEEE Transactions on Power Delivery, 13, 762–767, 1999.

- [3] Garret D.L., Pruitt J.G., *Problems Encountered with the APM of Analyzing Grounding Systems*, IEEE Transactions on Power Delivery, 104, 4006–4023, 1985.
- [4] Navarrina F., Colominas I., Casteleiro M., *Analytical Integration Techniques for Earthing Grid Computation by BEM*, In “Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences”, 1197–1206, CIMNE, Barcelona, 1992.
- [5] M. Casteleiro, L.A. Hernández, I. Colominas and F. Navarrina, *Memory and User guide of system TOTBEM for CAD of grounding grids in electrical installations*, Civil Engineering School, Universidad de La Coruña, 1994.
- [6] I. Colominas, *Cálculo y D.A.O. de tomas de tierra en instalaciones eléctricas: Una formulación numérica basada en el Método de Elementos de Contorno*. Tesis Doctoral, La Coruña, 1995.
- [7] Colominas I., Navarrina F., Casteleiro M., *A boundary element numerical approach for grounding grid computation*, Computer Methods and Applied Mechanics in Engineering, 174, 73-90, 1999.
- [8] Colominas I., Navarrina F., Casteleiro M., *A Numerical Formulation for Grounding Analysis in Stratified Soils*, IEEE Transactions on Power Delivery, 2000 [en prensa].
- [9] G.F. Tagg, *Earth Resistances*, Pitman, New York, 1964.
- [10] Johnson C., *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, USA, 1987.
- [11] J.Gómez-Calviño, I.Colominas, F.Navarrina, M.Casteleiro, J.M.Cela, *Parallel computing aided design of earthing systems for electrical substations in non homogeneous soil models*, In “Proceedings of the ICCP Workshops”, 381—388; IEEE Computer Society Press, USA, 2000.
- [12] I. Colominas, J. Gómez-Calviño, F. Navarrina, M. Casteleiro, *Computer Analysis of Earthing Systems in Horizontally/Vertically Layered Soils*, Electric Power Systems Research, 59, 149-156, 2001.