

# Cálculo y Diseño Asistido por Ordenador de Tomas de Tierra para Subestaciones Eléctricas\*

I. Colominas, F. Navarrina y M. Casteleiro  
GMNI — Grupo de Métodos Numéricos en Ingeniería  
Depto. de Métodos Matemáticos y de Representación  
Universidad de A Coruña  
E.T.S. de Ing. de Caminos, Canales y Puertos  
Campus de Elviña, 15192 A Coruña, España

e-mail: navarrina@iccp.udc.es, web: <http://caminos.udc.es/gmni>

17 de septiembre de 2002

## Resumen

En este trabajo se presenta una formulación numérica para el cálculo y diseño asistido por ordenador de tomas de tierra que es aplicable a un amplio rango de instalaciones eléctricas reales. La formulación propuesta se basa en la solución de una ecuación integral de Fredholm de primera especie mediante el Método de Elementos de Contorno. La solución de la ecuación integral proporciona la densidad de corriente que emana de la superficie del electrodo conductor. Una vez que se conoce la densidad de corriente, es posible evaluar de forma sencilla tanto la resistencia equivalente del sistema como el potencial en cualquier punto de la superficie del terreno.

---

\*Este trabajo ha sido parcialmente financiado por las siguientes empresas e instituciones: FECSA, Unión Fenosa, UFISA, CICYT, FEDER, Xunta de Galicia y Universidad de A Coruña

## 1. Introducción

En esencia, una toma de tierra es un electrodo conductor (normalmente una malla de cobre) que se entierra bajo una instalación eléctrica. Los objetivos de un sistema de toma de tierra son garantizar la integridad de los equipos y la continuidad del suministro eléctrico cuando tienen lugar situaciones de fallo —permitiendo el transporte y disipación de la corriente eléctrica en el terreno—, y evitar que las personas que se encuentren transitando o trabajando en las inmediaciones de una instalación conectada a tierra estén expuestas a una descarga eléctrica peligrosa. Para el análisis y el diseño de estos sistemas de protección es preciso determinar una serie de parámetros característicos, como la resistencia equivalente del sistema y las denominadas tensiones de paso, mano y contacto (máximas diferencias de potencial a las que puede estar sometido un ser humano que se encuentre en las inmediaciones de la instalación). A su vez, la evaluación de estas tensiones requiere conocer la distribución de potencial en la superficie del terreno cuando se produce una derivación de corriente a tierra [1, 2, 3, 4].

Los estudios sobre el cálculo de tomas de tierra se han planteado tradicionalmente con el fin de obtener fórmulas sencillas que permitan la estimación de estos parámetros. Este tipo de fórmulas —que en la actualidad son la base de los procedimientos de cálculo recomendados por las normas [1]— se fundamentan en modelos extremadamente simples, en resultados obtenidos empíricamente mediante ensayos de laboratorio y en la experiencia profesional acumulada por reconocidos expertos durante muchos años. Desde mediados de los años setenta se han desarrollado algunos métodos de cálculo matricial: los denominados “*computer methods*” en la norma IEEE Std. 80 [1]. En este tipo de métodos los electrodos de la toma de tierra se subdividen en segmentos, cuyos efectos e interrelaciones se modelan a partir de algunas hipótesis básicas, ideas intuitivas (como la superposición de fuentes de corriente puntuales y el promediado del error) y simplificaciones poco justificadas, cuando no cuestionables [2, 3, 4, 5, 6, 7]. A pesar del importante avance que han representado estas técnicas, se han puesto de manifiesto algunas anomalías notables en su aplicación práctica, tales como sus elevados requerimientos computacionales, los resultados poco realistas que se obtienen al aumentar la segmentación de los conductores, y la incertidumbre en su margen de error [6].

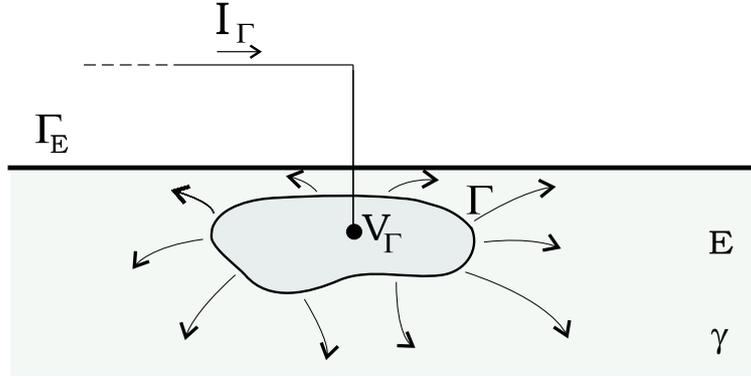


Figura 1: Disipación de corriente en el suelo.

## 2. Modelo Matemático

El problema asociado a la disipación de corriente eléctrica en el suelo se puede modelizar mediante la Teoría del Electromagnetismo de Maxwell [8, 9, 10]. Reduciendo el análisis a la obtención de la solución electrocinética estacionaria [1] y despreciando la resistencia eléctrica interna de la toma de tierra (una malla de electrodos interconectados enterrada a una determinada profundidad), las ecuaciones que rigen la derivación de corriente pueden escribirse en la forma [11, 12, 13, 14, 15]

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0 \text{ en } E, & \text{siendo } \boldsymbol{\sigma} &= -\boldsymbol{\gamma} \operatorname{grad}(V) \\ \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E &= 0 \text{ en } \Gamma_E, & V &= V_\Gamma \text{ en } \Gamma, \\ V &\rightarrow 0 \text{ si } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

siendo  $E$  el terreno,  $\boldsymbol{\gamma}$  su tensor de conductividad,  $\Gamma_E$  la superficie del terreno,  $\mathbf{n}_E$  su versor normal exterior y  $\Gamma$  la superficie de los electrodos (véase la figura 1). Las soluciones de este problema son el potencial  $V(\mathbf{x})$  y la densidad de corriente  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  en un punto arbitrario  $\mathbf{x}$  en  $E$  cuando la toma de tierra adquiere un potencial  $V_\Gamma$  respecto al nivel de referencia en un punto remoto. El valor de  $V_\Gamma$  se denomina Sobretensión de Tierra o GPR (*Ground Potential Rise*).

El campo vectorial  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  describe el movimiento de cargas eléctricas en el entorno de cada punto. Así, el producto escalar  $\boldsymbol{\sigma}^t(\mathbf{x})\mathbf{n}$  proporciona la densidad de corriente (cantidad de carga que atraviesa la unidad de superficie por unidad de tiempo) en la dirección del vector  $\mathbf{n}$  en el punto  $\mathbf{x}$ . En el estado estacionario, por definición, la cantidad de carga no varía en cada punto. Por tanto, la ecuación de equilibrio  $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0$  en  $E$  es

simplemente una ley estándar de conservación que expresa la indestructibilidad de carga. Obviamente, esta relación puede derivarse fácilmente a partir de las Ecuaciones de Maxwell [10, 11, 14].

La ecuación constitutiva  $\boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\gamma} \mathbf{grad}(V)$  es una versión generalizada de la Ley de Ohm. En esencia, las Ecuaciones de Maxwell establecen que la intensidad del campo eléctrico  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  es irrotacional en un estado estacionario. Por tanto, debe existir un potencial escalar  $V$  tal que  $\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\mathbf{grad}(V)$  [10, 11, 14]. En consecuencia, esta ecuación constitutiva establece una relación lineal entre la densidad de corriente  $\boldsymbol{\sigma}$  y la intensidad del campo eléctrico  $\boldsymbol{\mathcal{E}}$  en cada punto, en términos del denominado tensor de conductividad  $\boldsymbol{\gamma}$ . Para un medio homogéneo el tensor de conductividad es constante. Por otro lado, en un medio isótropo el tensor de conductividad se puede sustituir por una conductividad escalar  $\gamma$ . Por tanto, en el caso de un medio homogéneo e isótropo unidimensional esta ecuación constitutiva dice simplemente que la intensidad de corriente por unidad de superficie es proporcional a la pérdida de potencial eléctrico por unidad de longitud, lo que constituye una forma conocida de la Ley de Ohm.

Puesto que el producto escalar  $\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E$  proporciona el flujo de cargas eléctricas en la dirección de la normal a la superficie del terreno, es evidente que la condición de contorno natural  $\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E = 0$  en  $\Gamma_E$  es equivalente a considerar la atmósfera como un aislante perfecto. Por otro lado, la condición de contorno esencial  $V = V_\Gamma$  en  $\Gamma$  procede, obviamente, de despreciar la resistividad del electrodo.

Finalmente, la condición de contorno esencial  $V \rightarrow 0$  si  $|\boldsymbol{x}| \rightarrow \infty$  asigna un valor nulo (arbitrario pero conveniente) al potencial de referencia en un punto remoto [14]. Además, el potencial  $V$  debe satisfacer algunos requerimientos teóricos en el infinito (las denominadas condiciones de regularidad) que se explicitan en el Apéndice I [8, 9].

En estos términos, la densidad de corriente de pérdida  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi})$  que emana de un punto arbitrario  $\boldsymbol{\xi}$  de la superficie de los electrodos, la intensidad total de corriente que emana de la toma de tierra  $I_\Gamma$  y la resistencia equivalente del sistema electrodo-terreno  $R_{eq}$  pueden escribirse como

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\sigma}^t(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{n}, \quad I_\Gamma = \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi}) \, d\Gamma, \quad R_{eq} = \frac{V_\Gamma}{I_\Gamma}, \quad (2)$$

siendo  $\mathbf{n}$  el versor normal exterior a  $\Gamma$ . En lo sucesivo se considerará que  $V_\Gamma = 1$  sin pérdida de generalidad, dado que  $V$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  son proporcionales al valor de  $V_\Gamma$  (GPR).

En la práctica, la hipótesis de terreno homogéneo e isótropo se puede considerar aceptable [2, 3], por lo que el tensor  $\boldsymbol{\gamma}$  se puede sustituir por una conductividad escalar aparente  $\gamma$  que se determina experimentalmente. En el caso más general se considera que un modelo multi-capa permite representar aceptablemente la respuesta del terreno [16, 17]. Puesto que las técnicas que se exponen en este trabajo pueden generalizarse a modelos multi-capa [18, 19] (que representan el terreno estratificado en dos o más capas de diferente espesor, cada una caracterizada con un valor distinto de la conductividad escalar  $\gamma$ ), el desarrollo y ejemplos que se presentarán en lo sucesivo se restringen a modelos de terreno uniformes. Así, el problema (1) se reduce a la ecuación de Laplace con condiciones de contorno mixtas [8, 9].

Por otra parte, si se asume que la superficie del terreno es horizontal (véase el Apéndice I), la simetría (mediante el método de las imágenes) permite reescribir el problema (1) en términos de un Problema Exterior de Dirichlet [12]. La hipótesis de superficie horizontal es bastante adecuada dado que, en la práctica, el terreno en el que se construye una instalación eléctrica y sus alrededores se regularizan previamente a la colocación de los equipos y ejecución de los viales y zonas de servicios.

Las distintas variantes del problema de Dirichlet han sido tratadas exhaustivamente desde una rigurosa perspectiva matemática [9, 20, 21]. En la práctica, sin embargo, no es posible trabajar con soluciones analíticas excepto en algunos problemas académicos extremadamente simples. Por otro lado, en muchas aplicaciones técnicas en las que es necesario resolver un problema de este tipo se pueden obtener (y de hecho se obtienen rutinariamente) soluciones aproximadas mediante la aplicación de técnicas numéricas como el Método de Elementos Finitos o el Método de Diferencias Finitas. Sin embargo, en nuestro caso se dan cita varios factores que confieren al problema una extraordinaria dificultad adicional, y que impiden la utilización de este tipo de técnicas. En particular, las características del dominio (tridimensional e infinito) y la complejidad de la geometría del contorno (la superficie de la propia malla de la toma de tierra embebida en el terreno) elevan sus costes computacionales mucho más allá de lo aceptable.

En la mayor parte de las tomas de tierra instaladas en subestaciones eléctricas, el electrodo enterrado consiste en una malla de barras cilíndricas de material conductor interconectadas entre sí, cuyo relación diámetro/longitud suele ser relativamente pequeña ( $\approx 10^{-3}$ ). Puesto que el terreno se considera semi-infinito y el electrodo no está incluido en

él, la discretización del dominio  $E$  requiere un número extremadamente elevado de grados de libertad. Son precisamente los prohibitivos requerimientos computacionales asociados a este tipo de discretizaciones [22, 23] los que impiden el uso de los Métodos de Diferencias Finitas y Elementos Finitos. Obviamente, en la práctica tampoco es posible obtener soluciones analíticas para este tipo de problemas.

Sin embargo, recordemos que el diseño de un sistema de tierras tiene dos objetivos prioritarios: garantizar la integridad de los equipos y la continuidad del servicio (para lo que se intenta minimizar la resistencia equivalente), y preservar la seguridad humana (para lo que se limitan las tensiones de paso, mano y contacto) cuando ocurre una condición de fallo [1, 2, 3, 4]. Para evaluar las tensiones de paso mano y contacto sólo es preciso calcular el potencial en la superficie del terreno  $\Gamma_E$ . Además, la resistencia equivalente se obtiene fácilmente (2) a partir de la densidad de corriente de pérdida  $\sigma(\boldsymbol{\xi})$ . Por tanto, una formulación basada en el Método de Elementos de Contorno se perfila como la elección más acertada, ya que únicamente requeriría la discretización de la superficie de los electrodos  $\Gamma$  y permitiría reducir el problema tridimensional a un problema bidimensional [13, 14, 15, 24].

### 3. Planteamiento Variacional

La aplicación de la Identidad de Green [9, 20, 21] a (1) permite obtener la siguiente expresión integral (véase el Apéndice I) para el potencial  $V$  en  $E$ , en términos de la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$ :

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad (3)$$

siendo el núcleo débilmente singular

$$k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left( \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} + \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')} \right), \quad r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|, \quad (4)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}'$  es el punto simétrico de  $\boldsymbol{\xi}$  con respecto a la superficie del terreno.

Dado que (3) se verifica también sobre la superficie de los electrodos  $\Gamma$  [14] donde el potencial viene dado por la Sobretensión de Tierra ( $V(\boldsymbol{\chi}) = 1 \forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma$ ), la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$  debe satisfacer la ecuación integral de Fredholm de primera clase definida en  $\Gamma$

$$1 - \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma = 0 \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma, \quad (5)$$

cuya solución es la densidad de corriente de pérdida incógnita  $\sigma$ .

Finalmente, la expresión anterior puede escribirse en la forma variacional más débil mediante el Método de Residuos Ponderados [24, 25, 26]:

$$\iint_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma} w(\boldsymbol{\chi}) \left[ 1 - \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right] d\Gamma = 0, \quad (6)$$

que debe verificarse para todos los miembros  $w(\boldsymbol{\chi})$  de una determinada clase de funciones de test en  $\Gamma$  [13, 14, 15].

Parece evidente que la forma débil (6) es una consecuencia de la forma original (o fuerte) del problema (5). La implicación inversa no es obvia, aunque puede razonarse de forma intuitiva: la forma débil (6) debe satisfacerse para *cualquier* función de test  $w(\boldsymbol{\chi})$ , y esto no es posible a menos que la forma fuerte (5) se satisfaga también. De hecho, puede probarse que las dos formas del problema son equivalentes [24, 25] en general.

La forma débil (6) será el punto de partida para obtener una solución aproximada al problema original (1) mediante el Método de Elementos de Contorno. El desarrollo posterior será muy familiar para aquellos lectores que hayan tenido ya algún contacto con la tecnología básica del Método de Elementos Finitos [10, 24, 25]. La idea esencial es aproximar la ecuación variacional (6) en un contexto de dimensión finita. Primero sustituiremos la solución exacta  $\sigma(\boldsymbol{\xi})$  por una aproximación discreta  $\sigma^h(\boldsymbol{\xi})$  en términos de un conjunto de parámetros (incógnitas) a determinar. Y, a continuación, discretizaremos el espacio de las funciones de test de forma similar. Nuestro propósito es reducir el problema aproximado a un sistema lineal bien planteado, con el mismo número de grados de libertad (incógnitas) que ecuaciones discretizadas. También se discretizará la geometría del contorno, como es usual en esta clase de métodos, con el fin de simplificar y sistematizar el trabajo de integración.

### 3.1. Formulación en Elementos de Contorno

Dadas  $\mathcal{N}$  funciones de prueba  $\{N_i(\boldsymbol{\xi})\}$  definidas en  $\Gamma$  [24, 25], y dados  $\mathcal{M}$  elementos 2D de contorno  $\{\Gamma^\alpha\}$ , la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$  y la superficie de la toma de tierra  $\Gamma$  se pueden discretizar en la forma

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}) \approx \sigma^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i N_i(\boldsymbol{\xi}), \quad \Gamma = \bigcup_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} \Gamma^\alpha. \quad (7)$$

A su vez, la expresión (3) puede aproximarse por

$$V(\mathbf{x}) \approx V^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i V_i(\mathbf{x}), \quad V_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} V_i^\alpha(\mathbf{x}), \quad (8)$$

$$V_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma^\alpha} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma. \quad (9)$$

Finalmente, para un conjunto dado de  $\mathcal{N}$  funciones de test  $\{w_j(\boldsymbol{\chi})\}$  definidas en  $\Gamma$ , la forma variacional (6) se reduce al sistema de ecuaciones lineales [13, 14, 15]

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} R_{ji} \sigma_i = \nu_j, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N}; \quad (10)$$

$$R_{ji} = \sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} R_{ji}^{\beta\alpha}, \quad \nu_j = \sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \nu_j^\beta, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, \mathcal{N}; \\ j = 1, \dots, \mathcal{N}; \end{cases} \quad (11)$$

$$R_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma^\beta} w_j(\boldsymbol{\chi}) \left[ \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma^\alpha} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) N_i(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma \right] d\Gamma, \quad (12)$$

$$\nu_j^\beta = \iint_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma^\beta} w_j(\boldsymbol{\chi}) d\Gamma. \quad (13)$$

Sin embargo, es obvio que las discretizaciones 2D requeridas para resolver estas ecuaciones en problemas reales obligarían a manipular un número extremadamente alto de grados de libertad, ya que los sistemas de toma de tierra están formados en la práctica por mallas de varios cientos de conductores cilíndricos de gran longitud en relación con su diámetro. Por ello, y teniendo en cuenta que la matriz de coeficientes en (10) es llena, y que la integración 2D en (12) debe efectuarse dos veces sobre la superficie de cada uno de los electrodos, se comprende inmediatamente la necesidad de introducir algunas simplificaciones adicionales con el fin de reducir el extremadamente elevado coste computacional del problema.

## 4. Planteamiento Variacional Aproximado

Con este objetivo, y considerando la geometría específica de las mallas de toma de tierra en la mayoría de las instalaciones eléctricas reales, puede asumirse que la densidad de corriente es constante en la sección

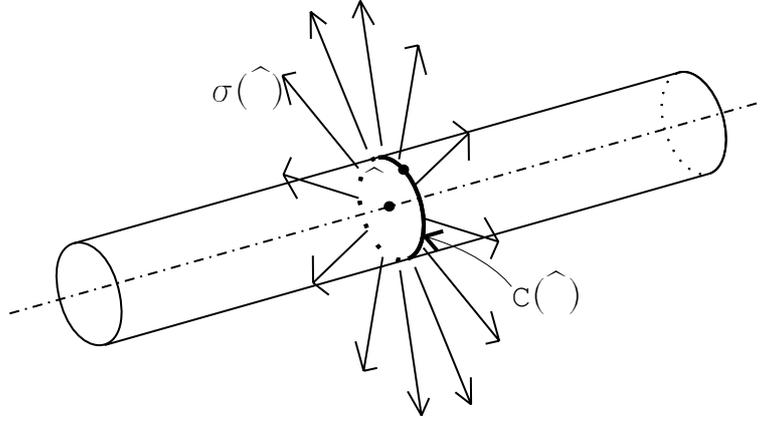


Figura 2: Hipótesis de uniformidad circunferencial.

transversal del electrodo cilíndrico [13, 14, 15]. Esta hipótesis de uniformidad circunferencial es ampliamente empleada en la mayor parte de los estudios teóricos y procedimientos prácticos recogidos en la bibliografía [1, 2, 3, 6].

Sea  $L$  el conjunto completo de los ejes de los conductores enterrados  $\Gamma$ . Sea  $\hat{\xi} \in L$  la proyección ortogonal sobre el eje de un punto genérico  $\xi \in \Gamma$  situado sobre la superficie de cilíndrica. Sea  $\phi(\hat{\xi})$  el diámetro (que se supone mucho menor que la longitud) del conductor, y sea  $C(\hat{\xi})$  el perímetro circunferencial de la sección transversal en el punto  $\hat{\xi}$  en cuestión. Si la distribución de la corriente de pérdida se supone uniforme en el perímetro de cada sección transversal (véase la figura 2), es decir  $\sigma(\xi) = \hat{\sigma}(\hat{\xi}) \forall \xi \in C(\hat{\xi})$ , se puede obtener una expresión aproximada del potencial (3) de la forma [13, 14, 15]

$$\hat{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\hat{\xi} \in L} \left[ \int_{\xi \in C(\hat{\xi})} k(\mathbf{x}, \xi) dC \right] \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL. \quad (14)$$

Esta hipótesis parece bastante adecuada y poco restrictiva si tenemos en cuenta la geometría real de las tomas de tierra [1, 3, 6]. Sin embargo, debido a que la densidad de corriente que emana no es realmente uniforme en la sección transversal, con carácter general la expresión anterior no podrá satisfacer estrictamente la condición de contorno  $\hat{V}(\mathbf{x}) = V_{\Gamma} = 1 \forall \mathbf{x} \in \Gamma$ , ni la forma variacional (6). No obstante, si se restringe la clase de funciones de test a aquellas con uniformidad circunferencial, es decir

$w(\boldsymbol{x}) = \widehat{w}(\widehat{\boldsymbol{x}}) \forall \boldsymbol{x} \in C(\widehat{\boldsymbol{x}})$ , la expresión (6) se reduce a

$$\int_{\widehat{\boldsymbol{x}} \in L} \widehat{w}(\widehat{\boldsymbol{x}}) \left[ \pi \phi(\widehat{\boldsymbol{x}}) - \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L} K(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL \right] dL = 0 \quad (15)$$

que debe satisfacerse para todos los miembros  $\widehat{w}(\widehat{\boldsymbol{x}})$  de una determinada clase de funciones de test en  $L$ , siendo el núcleo integral

$$K(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \int_{\boldsymbol{x} \in C(\widehat{\boldsymbol{x}})} \left[ \int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\xi}})} \widehat{k}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi}) dC \right] dC. \quad (16)$$

De este modo se impone que la condición de contorno se satisfaga en promedio en la sección transversal. De hecho, (15) puede considerarse como una forma variacional de la ecuación integral de Fredholm de primera especie en  $L$

$$\pi \phi(\widehat{\boldsymbol{x}}) - \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L} K(\widehat{\boldsymbol{x}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL = 0 \quad \forall \widehat{\boldsymbol{x}} \in L. \quad (17)$$

En esta formulación no se han tenido en cuenta ni los extremos ni las uniones de los conductores, por lo que es de esperar la aparición de ligeras anomalías localizadas en esos puntos, aunque los resultados globales no deberían sufrir perturbaciones significativas en la resolución de problemas reales.

#### 4.1. Formulación Aproximada en Elementos de Contorno

La resolución de la ecuación integral (15) requiere la discretización del dominio formado por el conjunto completo de los ejes de los conductores enterrados  $L$ . Así, dadas  $n$  funciones de prueba  $\{\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}})\}$  definidas en  $L$  y  $m$  elementos 1D de contorno  $\{L^\alpha\}$  (segmentos de los conductores cilíndricos), la densidad de corriente de pérdida  $\widehat{\sigma}$  y el conjunto de ejes de los conductores  $L$  se pueden discretizar en la forma

$$\widehat{\sigma}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) \approx \widehat{\sigma}^h(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma}_i \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}), \quad L = \bigcup_{\alpha=1}^m L^\alpha. \quad (18)$$

y una versión discretizada de (14) puede escribirse como

$$\widehat{V}(\boldsymbol{x}) \approx \widehat{V}^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^n \widehat{\sigma}_i \widehat{V}_i(\boldsymbol{x}), \quad \widehat{V}_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{\alpha=1}^m \widehat{V}_i^\alpha(\boldsymbol{x}), \quad (19)$$

$$\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \left[ \int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\xi}})} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dC \right] \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL. \quad (20)$$

Finalmente, para una elección adecuada de  $n$  funciones de test  $\{\widehat{w}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}})\}$  definidas en  $L$ , la ecuación (15) se reduce al sistema de ecuaciones lineales [13, 14, 15]

$$\sum_{i=1}^n \widehat{R}_{ji} \widehat{\sigma}_i = \widehat{v}_j, \quad j = 1, \dots, n; \quad (21)$$

$$\widehat{R}_{ji} = \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m \widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha}, \quad \widehat{v}_j = \sum_{\beta=1}^m \widehat{v}_j^\beta, \quad \begin{cases} i = 1, \dots, n; \\ j = 1, \dots, n; \end{cases} \quad (22)$$

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\boldsymbol{\chi}} \in L^\beta} \widehat{w}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \left[ \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} K(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL \right] dL, \quad (23)$$

$$\widehat{v}_j^\beta = \int_{\widehat{\boldsymbol{\chi}} \in L^\beta} \pi \phi(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \widehat{w}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) dL. \quad (24)$$

En general, en comparación con la formulación 2D presentada anteriormente, el esfuerzo computacional requerido para resolver problemas reales se reduce drásticamente con esta formulación 1D, dado que tanto el tamaño del sistema de ecuaciones lineales (21), como el número de contribuciones (23) que es preciso calcular son significativamente más pequeños que los de (10) y (12).

Sin embargo, en el caso de problemas reales, el coste computacional requerido para la integración es todavía considerablemente elevado, debido a las integrales circunferenciales (16) y (20) que es preciso evaluar. Por esta razón, se hace necesario introducir nuevamente ciertas simplificaciones para reducir los tiempos de cálculo a niveles aceptables [14, 15].

## 4.2. Formulación Simplificada

La integral circunferencial del núcleo  $k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  de (20) se puede escribir como [13, 14, 15]

$$\int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\xi}})} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dC = \int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\xi}})} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} dC + \int_{\boldsymbol{\xi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\xi}})} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')} dC. \quad (25)$$

La distancia  $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  entre un punto  $\mathbf{x}$  del dominio y un punto arbitrario  $\boldsymbol{\xi}$  situado en el contorno del electrodo se puede expresar en la forma

$$r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sqrt{|\mathbf{x} - \widehat{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \frac{\phi^2(\widehat{\boldsymbol{\xi}})}{4} - |\mathbf{x} - \widehat{\boldsymbol{\xi}}| \phi(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) \sin \omega \cos \theta}, \quad (26)$$

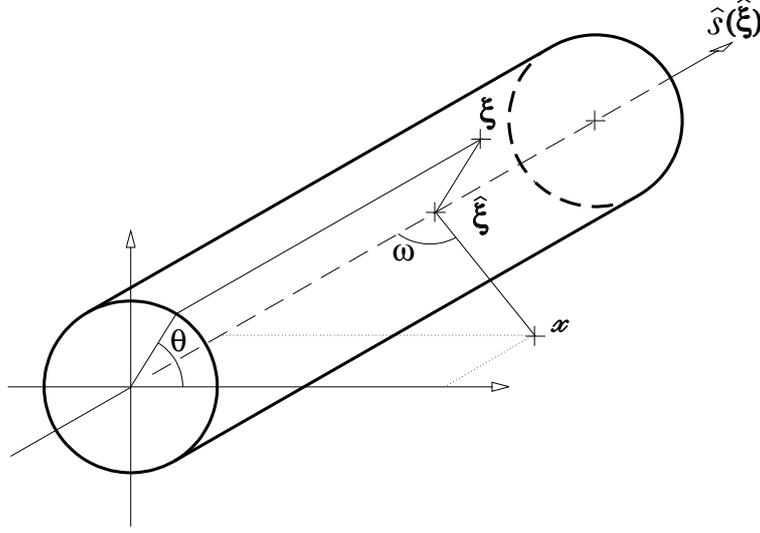


Figura 3: Distancia entre un punto dado  $\mathbf{x}$  y un punto arbitrario  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  de la superficie del electrodo.

donde  $\theta$  es la posición angular en el perímetro de la sección transversal del electrodo cilíndrico, y

$$\text{sen } \omega = \frac{|(\hat{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{x}) \times \hat{\mathbf{s}}(\hat{\boldsymbol{\xi}})|}{|\hat{\boldsymbol{\xi}} - \mathbf{x}|} \quad (27)$$

como muestra la figura 3.

La integral elíptica obtenida cuando  $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  de (26) se sustituye en (25) se puede aproximar por integración numérica hasta un nivel arbitrario de precisión. Sin embargo, dado que nos interesa calcular los potenciales en puntos  $\mathbf{x}$  de la superficie del terreno, cuya distancia a los puntos arbitrarios  $\hat{\boldsymbol{\xi}}$  situados en los ejes es mucho mayor que el diámetro  $\phi(\hat{\boldsymbol{\xi}})$  de los electrodos que forman la malla de tierra [14], la distancia  $r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  de (26) se puede aproximar como

$$r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \approx \hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{|\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \frac{\phi^2(\hat{\boldsymbol{\xi}})}{4}}. \quad (28)$$

De este modo, la integral circunferencial del núcleo  $k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  de (25) resulta

$$\int_{\hat{\boldsymbol{\xi}} \in C(\hat{\boldsymbol{\xi}})} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dC \approx \pi \phi(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}), \quad (29)$$

donde

$$\widehat{k}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \left( \frac{1}{\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})} + \frac{1}{\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}')} \right) \quad (30)$$

y  $\widehat{\boldsymbol{\xi}}'$  es el punto simétrico de  $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$  con respecto a la superficie del terreno. La expresión (29) puede interpretarse como el resultado de integrar la expresión (25) mediante una cuadratura de Newton-Cotes con un solo punto. Esta aproximación es suficientemente precisa a menos que la distancia entre los puntos  $\mathbf{x}$  y  $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$  sea del mismo orden de magnitud que el diámetro  $\phi(\widehat{\boldsymbol{\xi}})$ , lo que no ocurrirá en la práctica al emplear esta aproximación para calcular los valores del potencial en la superficie del terreno.

Si ahora se sustituye la expresión (29) en (16), se puede obtener la aproximación

$$K(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \approx \int_{\boldsymbol{\chi} \in C(\widehat{\boldsymbol{\chi}})} \pi \phi(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{k}(\boldsymbol{\chi}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) dC, \quad (31)$$

y, teniendo en cuenta las aproximaciones empleadas en (28), el núcleo integral (16) se puede simplificar en la forma:

$$K(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \approx \pi \phi(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) \pi \phi(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \widehat{\widehat{k}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}), \quad (32)$$

siendo

$$\widehat{\widehat{k}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \left( \frac{1}{\widehat{\widehat{r}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})} + \frac{1}{\widehat{\widehat{r}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}')} \right), \quad (33)$$

y

$$\widehat{\widehat{r}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{|\widehat{\boldsymbol{\chi}} - \widehat{\boldsymbol{\xi}}|^2 + \frac{\phi^2(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) + \phi^2(\widehat{\boldsymbol{\chi}})}{4}}, \quad (34)$$

donde la inclusión de los diámetros  $\phi(\widehat{\boldsymbol{\chi}})$  y  $\phi(\widehat{\boldsymbol{\xi}})$  preserva automáticamente la simetría en el sistema de ecuaciones (21), aunque las secciones transversales del electrodo sean distintas en los puntos  $\widehat{\boldsymbol{\chi}}$  y  $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$ .

La selección de diferentes tipos de funciones de prueba y test en (23) y (24) conduce a diferentes formulaciones específicas. Así, con elementos de densidad de corriente constante (un nodo centrado por segmento de conductor), la Colocación Puntual (deltas de Dirac como funciones de prueba) se identifica con los métodos intuitivos más antiguos, basados en la idea de sustituir cada segmento de conductor por una “esfera imaginaria” [5]. Por otra parte, la formulación de Galerkin (donde las funciones de test son las mismas que las de prueba) se identifica con una clase de

métodos más recientes, como el Método del Promediado del Potencial o APM (*Average Potential Method*) [5, 6]. Este método se basa en la idea de que cada segmento de conductor se sustituye por una “línea de fuentes puntuales de corriente sobre la longitud del conductor” [11] (elementos de densidad de corriente constante), y los coeficientes (23) corresponden a “resistencias mutuas y propias” entre “segmentos de conductor” [6]. Obviamente, es posible desarrollar formulaciones más avanzadas y precisas [14, 15] aproximando la densidad de corriente mediante funciones de prueba lineales, cuadráticas, y polinomios de grado superior (utilizando más de un nodo funcional por segmento de conductor).

## 5. Técnicas de Integración Analítica

En lo sucesivo, el modelo numérico y los ejemplos se restringirán a formulaciones de tipo Galerkin, donde la matriz del sistema (21) es simétrica y definida positiva [24]. Así, si se introducen las simplificaciones de las integrales circunferenciales (29) y (32), y se asume que el diámetro de los conductores es constante en cada elemento, las expresiones finales que permiten calcular los coeficientes del potencial (20) y del sistema de ecuaciones (23) resultan ser:

$$\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \pi \phi^\alpha \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \widehat{k}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL, \quad (35)$$

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{\pi \phi^\beta \pi \phi^\alpha}{4\pi\gamma} \int_{\widehat{\boldsymbol{\chi}} \in L^\beta} \widehat{N}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}}) \left[ \int_{\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \widehat{k}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}) dL \right] dL, \quad (36)$$

donde  $\phi^\alpha$  y  $\phi^\beta$  representan el diámetro del conductor (que se supone constante) en los elementos  $L^\alpha$  y  $L^\beta$ . Obviamente, las contribuciones (36) conducen a una matriz simétrica en (22).

El cálculo de las restantes integrales que intervienen en (35) y (36) no es obvio. Debido al mal comportamiento de las funciones de los integrandos no es posible emplear cuadraturas de Gauss, por lo que la mejor alternativa numérica parece ser una cuadratura de Simpson compuesta adaptativa (utilizando la extrapolación de Richardson como estimador de error) [11, 13, 14]. Sin embargo, debido al altísimo coste que ésta implica en el análisis de problemas reales, se ha optado por desarrollar una técnica que incorpore la integración analítica de todos los coeficientes.

De este modo, se derivaron inicialmente fórmulas explícitas para calcular (35) en los casos de elementos de densidad de corriente constante

(1 nodo funcional), lineal (2 nodos funcionales) y cuadrática (3 nodos funcionales) [13, 14, 15]. Posteriormente [14, 15] se obtuvieron expresiones explícitas para calcular las contribuciones (36). Para los casos más simples, estas expresiones se reducen a las fórmulas propuestas en otros métodos desarrollados en la literatura, como por ejemplo el Método del Promediado del Potencial (APM), que corresponde al caso de utilizar elementos de densidad de corriente constante [5].

La derivación de estas fórmulas explícitas no es obvia y requiere un importante y sistemático trabajo analítico [14], que es excesivamente largo para desarrollarlo completamente en este artículo. Es importante resaltar que estas expresiones han sido obtenidas teniendo en cuenta su posterior implementación en un programa de ordenador, por lo que se han derivado de forma recurrente e involucrando el menor número posible de operaciones con funciones trascendentes. El desarrollo y deducción completa de estas fórmulas pueden encontrarse en trabajos previos de los autores [14, 15].

Este modelo numérico unidimensional simplificado, basado en el método de elementos de contorno con integración analítica de los coeficientes del sistema de ecuaciones es muy estructurado y está desarrollado de forma que sea posible incorporarlo eficazmente en un sistema de diseño asistido por ordenador. En todo caso, la implementación de la formulación debe realizarse con cierto cuidado, debido a la relativa complejidad de las expresiones que intervienen en el cálculo de coeficientes matriciales, a su casuística y en algunos casos a su mal condicionamiento.

## 6. Convergencia

En principio, esperamos que la densidad de corriente de pérdida discretizada  $\hat{\sigma}^h(\hat{\boldsymbol{\xi}})$  converja a la solución exacta  $\sigma(\boldsymbol{\xi})$  a medida que se aumente el número de grados de libertad  $n$ . También esperamos que el potencial discretizado  $\hat{V}^h(\mathbf{x})$  converja simultáneamente a la solución exacta  $V(\mathbf{x})$ . En general, podemos intentar obtener estos efectos en (18) o bien incrementando la segmentación de los conductores, o bien eligiendo funciones de prueba  $\hat{N}_i(\hat{\boldsymbol{\xi}})$  más sofisticadas (es decir, usando elementos de orden superior) [24, 25]. En la terminología usual del Método de Elementos Finitos, la primera opción se denomina refinamiento de tipo **h**, mientras que la segunda se denomina refinamiento de tipo **p**.

Sin embargo, se comprueba que estas formulaciones no convergen a

la solución exacta [6, 11, 12]. En la práctica se aprecian inestabilidades numéricas crecientes que perturban fuertemente el valor de la densidad de corriente de pérdida cuando la discretización se refina más allá de determinado punto [6, 12]. De hecho, las inestabilidades numéricas tienden a extenderse a lo largo de toda la longitud de los conductores al incrementar la segmentación. Esto produce resultados evidentemente no realistas (por ejemplo potenciales negativos) en los cálculos subsiguientes del potencial en la superficie del terreno, aunque la resistencia equivalente  $R_{eq}$  converge aparentemente a su valor exacto [14, 23].

Estos problemas fueron descritos por Garret y Pruitt en un artículo especialmente lúcido y ya clásico [6] sobre la precisión del Método del Promediado del Potencial (APM). A pesar de carecer de una deducción rigurosa del método, estos autores establecieron y discutieron la mayor parte de las fuentes de error. Sin embargo, el origen de las inestabilidades mencionadas anteriormente no pudo ser explicado en aquel marco teórico incompleto. Como escribieron estos autores *“until a rigorous mathematical error analysis is performed, the ground grid designer must continue to work with an unknown correction factor in ground grid analysis”*. La formulación presentada en este artículo proporciona el marco teórico riguroso en el que se pueden analizar, explicar y controlar aquellas anomalías.

El problema (1) es un problema bien puesto [20]. Se puede argumentar que despreciar la resistividad del electrodo no es absolutamente realista, y por tanto  $V_{\Gamma}$  no es exactamente constante sobre la superficie del electrodo. Esta línea de razonamiento conduce a aceptar la necesidad de utilizar modelos más sofisticados en aquellos casos en los que la resistividad del electrodo deba ser tenida en cuenta. Pero esta idealización parece ser perfectamente razonable, y suficientemente precisa, para la mayor parte de los supuestos prácticos [14, 23], por lo que no se le puede atribuir el origen de las inestabilidades observadas. Por otro lado, la deducción de la expresión (3) y de la ecuación integral de Fredholm de primera especie (5) han sido rigurosamente establecidas [14]. Además, el problema definido por la forma variacional (6) también está bien puesto, el núcleo (4) es débilmente singular, y el sistema lineal (10) está relativamente bien condicionado para discretizaciones realistas de la superficie del electrodo [24], lo que no sucede en otros problemas similares que tienen núcleos regulares, que son frecuentemente muy mal-condicionados y, por tanto, extremadamente difíciles de resolver [24].

Por tanto, los motivos por los que se produce el fallo en la convergencia del método deben ser buscados entre las simplificaciones introducidas

con el fin de reducir la complejidad computacional de la formulación general 2D de Elementos de Contorno [13, 14, 15], es decir: **A)** la corriente de pérdida se supone uniforme en el perímetro de la sección transversal de cada conductor cilíndrico, **B)** los extremos y las uniones de los conductores no se tienen en cuenta, y **C)** las aproximaciones (29) y (32) se introducen para evitar la integración circunferencial y reducir el tiempo de computación.

Los autores han realizado varios ensayos numéricos para el problema académico de una única barra en un dominio infinito [23, 14]. Este problema se ha resuelto mediante: **1)** la formulación de elementos 1D de contorno presentada en este artículo, **2)** una formulación estándar de elementos 2D de contorno para problemas de potencial axisimétricos (donde no se realiza ningún tipo de aproximaciones ni en el núcleo de la ecuación integral ni en las integrales circunferenciales), y **3)** un programa específicamente desarrollado de elementos finitos 2D para problemas de potencial axisimétricos. Los resultados de la formulación 1D concuerdan significativamente con los obtenidos con los otros dos métodos. Sin embargo, si se aumenta el grado de discretización, los resultados que se obtienen con esta técnica de elementos 1D de contorno oscilan alrededor de la solución real. Dado que la hipótesis de uniformidad circunferencial se satisface estrictamente en este ejemplo de prueba [23], y no se producen oscilaciones en la solución con la formulación estándar de elementos 2D de contorno ni con la de elementos finitos, la simplificación **A)** no puede ser el origen de los problemas encontrados al aplicar estos métodos. No se han desarrollado ensayos específicos hasta el momento orientados a cuantificar el error debido a la simplificación **B)**. No obstante, la experiencia de los autores indica que se pueden esperar efectos locales ligeramente anómalos cerca de los extremos y de las uniones entre los conductores, aunque los resultados globales no deberían verse seriamente afectados. Remarcamos que las deducciones de la ecuación (14) y de la ecuación integral de Fredholm de primera especie (17) han sido rigurosamente establecidas [14, 15]. Además, el problema definido por la forma variacional (15) es aproximado pero está bien puesto, el núcleo (16) es débilmente singular, y el sistema lineal (21) debe ser razonablemente bien-condicionado para segmentaciones realistas de los conductores [24].

Por tanto, el origen de estos problemas debe emanar de las simplificaciones **C)** introducidas en la formulación numérica 1D. El hecho es que la aproximación (29) no es válida para distancias pequeñas. Así, cuando se aumenta la discretización y el tamaño de los elementos llega a ser

comparable al diámetro del conductor, la aproximación (32) introduce errores significativos en los coeficientes del sistema de ecuaciones (21) que corresponden a nodos adyacentes, y especialmente en los términos diagonales.

Por otra parte, puesto que el error de la aproximación aumenta con el nivel de discretización, los resultados numéricos para discretizaciones finas no tienden a la solución de la ecuación integral (5) con el núcleo (6), sino a la solución de una ecuación integral distinta y mal condicionada (17) con el núcleo no singular aproximado (32) [13, 14, 15].

Es un resultado teórico conocido para las ecuaciones de Fredholm de primera especie que el inverso de un operador completamente continuo no es acotado [28]. En palabras sencillas: al usar las aproximaciones (29) y (32) nos enfrentamos a un problema muy mal-condicionado cuya solución no se puede hallar numéricamente, puesto que existen distribuciones de la densidad de corriente de pérdida muy diferentes entre sí que verifican la condición de contorno  $\hat{V}^h(\boldsymbol{\chi}) = V_\Gamma = 1 \ \forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma$  en su forma débil (15) con errores arbitrariamente pequeños.

Esto explica la razón por la que se obtienen resultados poco realistas cuando aumenta la discretización [6], y se impide la convergencia [12].

## 7. Coste Computacional y Eficacia

En este punto, remarcamos las lúcidas recomendaciones establecidas en [6]. Este tipo de métodos debería ser empleado de forma iterativa, incrementando la segmentación en cada ejecución del problema. Una estrategia simple (aunque costosa) sería comenzar con un número reducido de segmentos de tamaño similar, y realizar una bisección de cada segmento en cada ejecución del programa hasta que los resultados converjan (aparentemente) dentro de unas tolerancias razonables. Remarcamos que la segmentación no puede incrementarse indefinidamente por las razones expuestas anteriormente. Como regla práctica, podemos decir que las aproximaciones (29) y (32) no serán válidas cuando el tamaño de los segmentos sea comparable al (o menor que el) diámetro del electrodo.

No obstante, se ha comprobado que los resultados obtenidos con niveles de discretización normales son suficientemente precisos en la práctica [14, 23]. Sin embargo, es obvio que en casos especiales podrían ser requeridos resultados más precisos. De hecho, se han documentado en la literatura casos en los que el Método del Promediado del Potencial (APM),

por ejemplo, se ha manifestado incapaz de proporcionar resultados aceptables. En estos casos, el uso de elementos de orden superior (lineal o cuadrático) podría ayudar, al menos hasta un cierto nivel de precisión.

Por otro lado, la formulación propuesta señala una posible estrategia que podría aumentar la precisión de estos métodos en un futuro inmediato. Remarcamos que la formulación 1D simplificada es mal-condicionada, pero la formulación 1D previa es correcta. Por tanto, la solución radica en sustituir las aproximaciones (29) y (32) por aproximaciones mejores que también sean válidas para distancias cortas. Esto no es obvio, ni inmediato, puesto que sería necesario adaptar la mayor parte del trabajo analítico descrito en las secciones anteriores. En cualquier caso, la investigación en esta línea podría dar lugar a métodos eficaces y asintóticamente estables en un futuro próximo.

El coste computacional global de esta formulación se puede analizar teniendo en cuenta que para una discretización dada, con  $m$  elementos de  $p$  nodos cada uno y un total de  $n$  grados de libertad, se debe generar y resolver el sistema de ecuaciones lineal (21) de dimensión  $n$ . La matriz de coeficientes es simétrica pero no vacía, por lo que su resolución mediante un método directo requiere  $O(n^3/3)$  operaciones. Por su parte, la generación de esta matriz requiere  $O(m^2p^2/2)$  operaciones, cada una de ellas equivalente a una integral doble, debido a las  $p^2$  contribuciones que se calculan mediante la expresión (36) para cada par de elementos (considerando que aproximadamente la mitad se obtienen directamente por simetría). Una vez obtenida la densidad de corriente normal que emana de los electrodos, el coste de calcular la resistencia equivalente (2) es despreciable. El coste adicional asociado a la obtención del potencial en un punto dado (normalmente en la superficie del terreno) por medio de (19) y (35) requiere sólo  $O(mp)$  operaciones. No obstante, si es necesario calcular potenciales en un gran número de puntos (por ejemplo para el dibujo de isolíneas) el tiempo de computación puede ser considerable.

En el caso de problemas pequeños/medianos el mayor esfuerzo computacional se invierte en la generación de la matriz, en tanto que la resolución del sistema de ecuaciones debería ser el factor predominante en problemas medianos/grandes. Sin embargo, a partir de un cierto tamaño del problema la utilización de un método directo para la solución del sistema de ecuaciones es prohibitiva, por lo que se preferirá una técnica iterativa o semiiterativa. En nuestro caso, los mejores resultados los ha proporcionado un algoritmo de gradientes conjugados con preconditionamiento diagonal ensamblando la matriz de coeficientes [14, 29, 30].

Esta técnica ha demostrado ser enormemente eficaz en este tipo de problemas, tal y como predice la teoría [24], y tiene un coste computacional relativamente bajo en comparación con el volumen de cálculo necesario para generar el sistema de ecuaciones.

En cuanto a la elección del tipo de elemento en un problema determinado, para una discretización dada es evidente que la utilización de elementos de densidad de corriente constante proporcionará resultados menos precisos, aunque con un coste computacional menor, que la utilización de elementos de densidad de corriente lineal o parabólica. Obviamente, en comparación con los resultados obtenidos con una malla relativamente grosera de elementos de densidad de corriente constante, podremos aumentar la precisión o bien incrementando el número de elementos o utilizando elementos de mayor orden [23]. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que no es posible aumentar de forma indiscriminada el número de elementos dado que las aproximaciones (29) y (32) realizadas no son satisfactorias si el tamaño del elemento es del mismo orden de magnitud que el diámetro del electrodo cilíndrico, como se ha comentado anteriormente. En todo caso, para un problema dado, será necesario valorar cuidadosamente hasta qué punto es conveniente refinar la malla, y en su caso aumentar el número de elementos (refinamiento de tipo  $\mathbf{h}$ ) o utilizar elementos de mayor orden [14, 15] (refinamiento de tipo  $\mathbf{p}$ ).

## 8. Ejemplos de Aplicación

Las técnicas desarrolladas por los autores se han implementado en un sistema de diseño asistido por ordenador para tomas de tierra de subestaciones eléctricas denominado TOTBEM [31, 32]. En el momento actual, el cálculo de una toma de tierra con un modelo de suelo homogéneo e isótropo se realiza en tiempo real en un ordenador personal, y el tamaño del problema más grande que es posible resolver está limitado por la capacidad de memoria que requiere el almacenamiento y manipulación de la matriz de coeficientes. Así, para un problema de 2000 grados de libertad, se precisan aproximadamente 16Mb, mientras que los tiempos de generación de la matriz y resolución del sistema son todavía reducidos y del mismo orden de magnitud (algunos segundos en un ordenador personal de gama media en el año 2000).

El sistema ha sido usado por los autores y por varias empresas eléctricas españolas para analizar instalaciones de gran tamaño durante los

últimos 10 años. Alguno de estos resultados se pueden encontrar en [13, 14, 15, 32].

Los siguientes ejemplos han sido resueltos mediante el sistema TOT-BEM. Los resultados fueron obtenidos para un valor de la sobretensión de tierra (GPR) de  $V_{\Gamma} = 10 \text{ kV}$ . El valor estimado de la conductividad del suelo fue  $\gamma = (60 \text{ } \Omega \text{ m})^{-1}$ . En todos los casos se utilizó una ponderación de tipo Galerkin.

### 8.1. Ejemplo 1: Subestación E.R. Barberá

El primer ejemplo es la subestación E. R. Barberá ( $90 \times 145 \text{ m}^2$ ) cerca de la ciudad de Barcelona, operada por la compañía eléctrica *FECSA*. Este sistema de tierras (veáse la figura 4) está formado por 408 barras ( $\phi = 12,85 \text{ mm}$ ) enterradas a una profundidad de  $80 \text{ cm}$ . Cada conductor se discretiza en un elemento de densidad lineal (la densidad de corriente de pérdida aproximada  $\sigma^h$  varía linealmente dentro de cada conductor). Esto conduce a un problema aproximado con un total de 238 incógnitas.

La figura 5 muestra la distribución del potencial calculado sobre la superficie del terreno cuando sucede una condición de fallo. La figura 6 muestra los perfiles del potencial calculado a lo largo de dos líneas sobre la superficie del terreno. La corriente de fallo calculada es  $I_{\Gamma} = 31,8 \text{ kA}$ , que determina una resistencia equivalente de  $R_{eq} = 0,315 \text{ } \Omega$ .

Este caso fue originalmente calculado en un PC486/16Mb a 66MHz [15]. Completar el análisis en 1997 requirió 450 segundos. El mismo análisis puede realizarse en unos 15 segundos usando un PC de gama media en 2002.

Nótese que la utilización de un elemento de densidad constante (en lugar de lineal) por conductor conduciría a un problema mayor (con 408 incógnitas). Este ejemplo muestra que la utilización de elementos de densidad lineal puede ser ventajoso en comparación con la utilización de elementos de densidad constante, puesto que permite obtener resultados de mayor precisión para un esfuerzo computacional similar (el menor coste asociado a la resolución del sistema de ecuaciones se compensa con el mayor coste asociado a la generación de la matriz).

### 8.2. Ejemplo 2: Subestación Balaídos II

El segundo ejemplo es la subestación Balaídos II ( $80 \times 60 \text{ m}^2$ ), cerca de la ciudad de Vigo, operada por la compañía eléctrica *Unión Fenosa*.

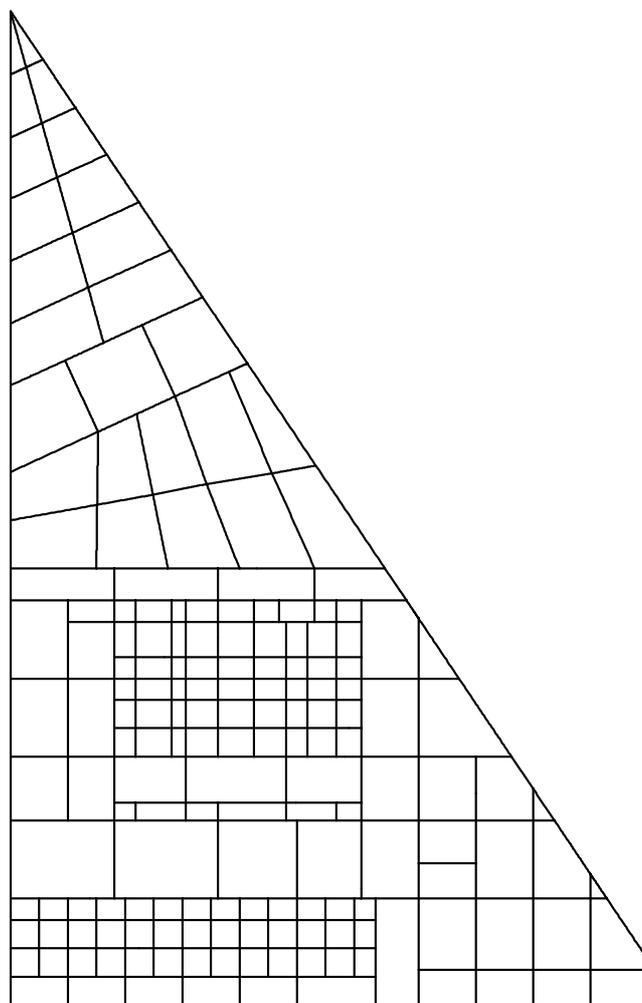


Figura 4: Subestación E.R. Barberá: Malla de electrodos.

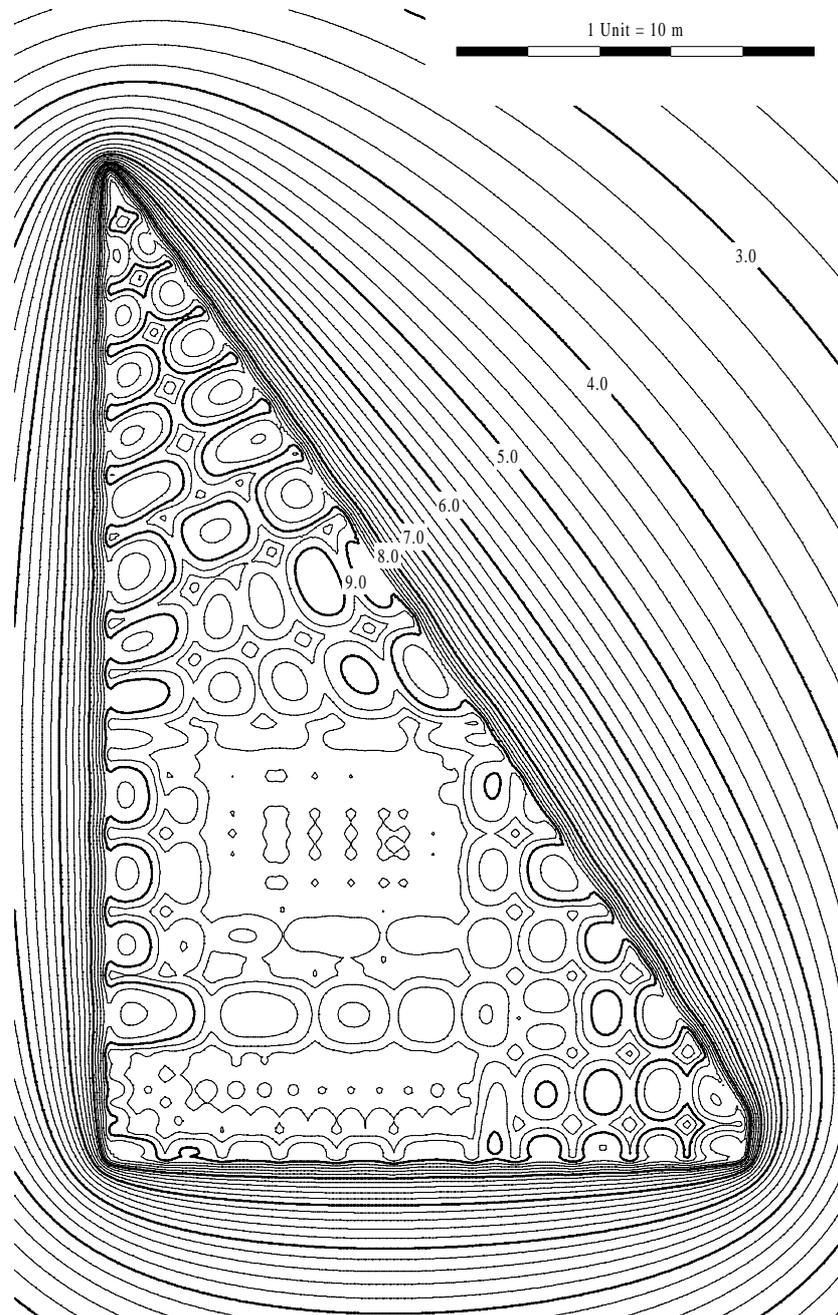


Figura 5: Subestación E.R. Barberá: Distribución de potencial sobre la superficie del terreno (líneas de nivel cada 0,2 kV).

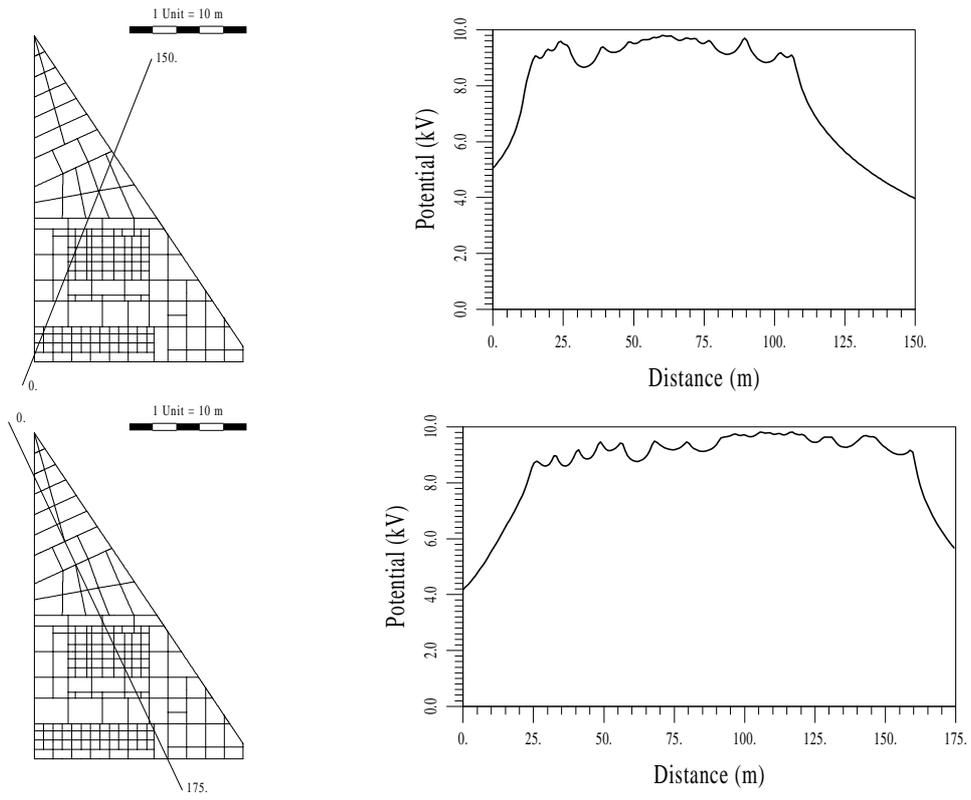


Figura 6: Subestación E.R. Barberá: Perfiles de potencial a lo largo de dos líneas.

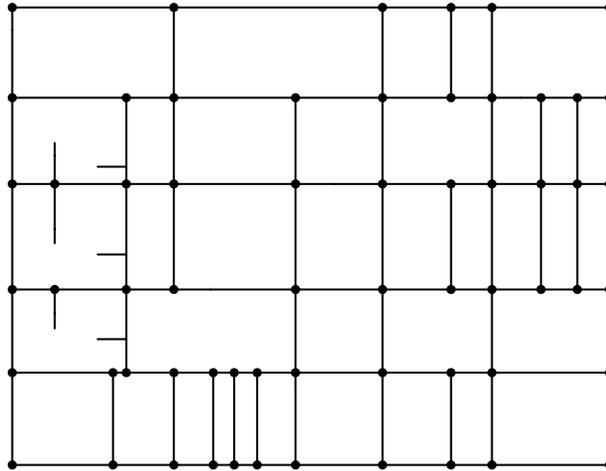


Figura 7: Subestación Balaídos II: Malla de electrodos (los puntos negros corresponden a picas verticales).

Este sistema de tierras (veáse la figura 7) está formado por 107 barras ( $\phi = 11,28 \text{ mm}$ ) enterradas a una profundidad de  $80 \text{ cm}$  y complementadas con 67 picas verticales ( $\phi = 14,00 \text{ mm}$ ,  $L = 2,5 \text{ m}$ ). Cada conductor se discretiza en un elemento de densidad cuadrática (la densidad de corriente de pérdida aproximada  $\sigma^h$  varía cuadráticamente dentro de cada conductor). Esto conduce a un problema aproximado con un total de 315 incógnitas.

La figura 8 muestra la distribución del potencial calculado sobre la superficie del terreno cuando sucede una condición de fallo. La corriente de fallo calculada es  $I_{\Gamma} = 25,0 \text{ kA}$ , que determina una resistencia equivalente  $R_{eq} = 0,400 \Omega$ .

Este caso fue también originalmente calculado en un PC486/16Mb a 66MHz [15]. Completar el análisis en 1997 requirió 600 segundos. El

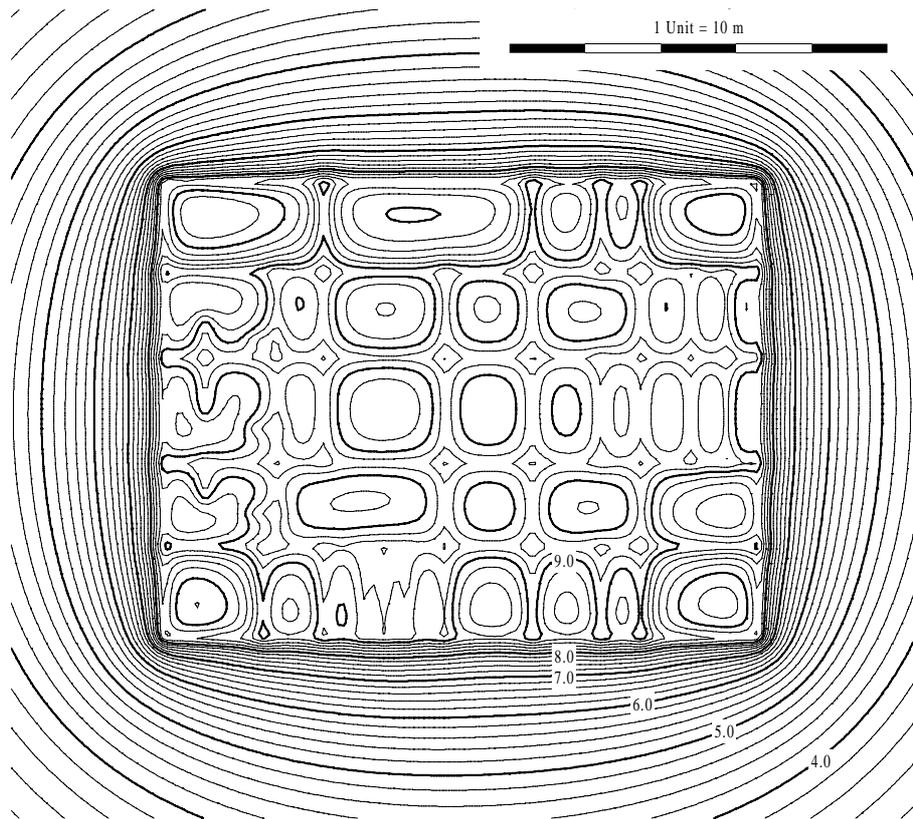


Figura 8: Subestación Balaídos II: Distribución de potencial sobre la superficie del terreno (líneas de nivel cada 0,2 kV; líneas regreasadas cada 1 kV).

mismo análisis puede realizarse en unos 20 segundos usando un PC de gama media en 2002.

Nótese que la utilización de un elemento de densidad constante (en lugar de cuadrática) por conductor conduciría a un problema con 174 incógnitas, mientras que la utilización de un elemento de densidad lineal por conductor conduciría a un problema con 141 incógnitas. Este ejemplo muestra que la utilización de elementos de densidad cuadrática conduce a problemas aproximados de mayor tamaño que la utilización de elementos de densidad constante o lineal. Obviamente, el coste computacional dedicado a la generación de la matriz y a la solución del sistema de ecuaciones también es mayor. Sin embargo, el coste computacional total es aún aceptable (del mismo orden de magnitud), mientras que la precisión de los resultados es mucho mayor.

### 8.3. Ejemplo 3: Subestación Santiago II

El tercer (y último) ejemplo es la subestación Santiago II ( $230 \times 195 \text{ m}^2$ ) cerca de la ciudad de Santiago de Compostela, operada por la compañía eléctrica *Unión Fenosa*. Este sistema de tierras (veáse la figura 9) está formado por 534 barras ( $\phi = 11,28 \text{ mm}$ ) enterradas a una profundidad de  $75 \text{ cm}$  y complementadas con 24 picas verticales ( $\phi = 15,00 \text{ mm}$ ,  $L = 4,0 \text{ m}$ ) Cada barra se discretiza en un elemento y cada pica se discretiza en dos elementos, todos ellos de densidad lineal (la densidad de corriente de pérdida aproximada  $\sigma^h$  varía linealmente dentro de cada conductor). Esto conduce a un problema aproximado con un total de 386 incógnitas.

La figura 10 muestra la distribución del potencial calculado sobre la superficie del terreno cuando sucede una condición de fallo.

La corriente de fallo calculada es  $I_F = 67,3 \text{ kA}$ , que determina una resistencia equivalente  $R_{eq} = 0,149 \Omega$ .

Este caso fue originalmente calculado en un DEC AlphaServer 4000-AXP con sistema operativo VMS [33, 34]. Completar el análisis en 1999 requirió 7,7 segundos. El mismo análisis puede realizarse en unos 20 segundos usando un PC de gama media en 2002.

Nótese que la utilización de un elemento de densidad constante (en lugar de lineal) por conductor conduciría a un problema mayor (con 582 incógnitas). Este ejemplo muestra nuevamente como la utilización de elementos de densidad lineal puede ser ventajoso en comparación con la utilización de elementos de densidad constante, puesto que permite

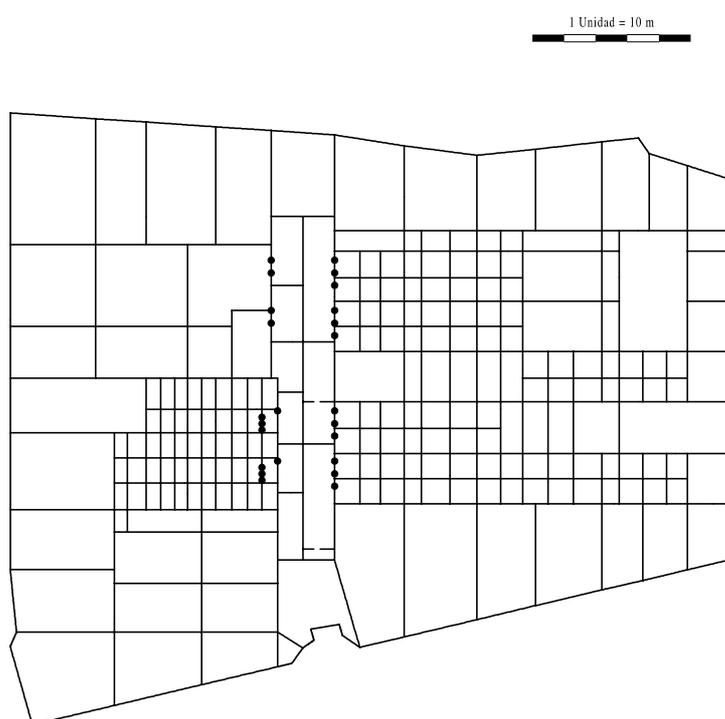


Figura 9: Subestación Santiago II: Malla de electrodos.

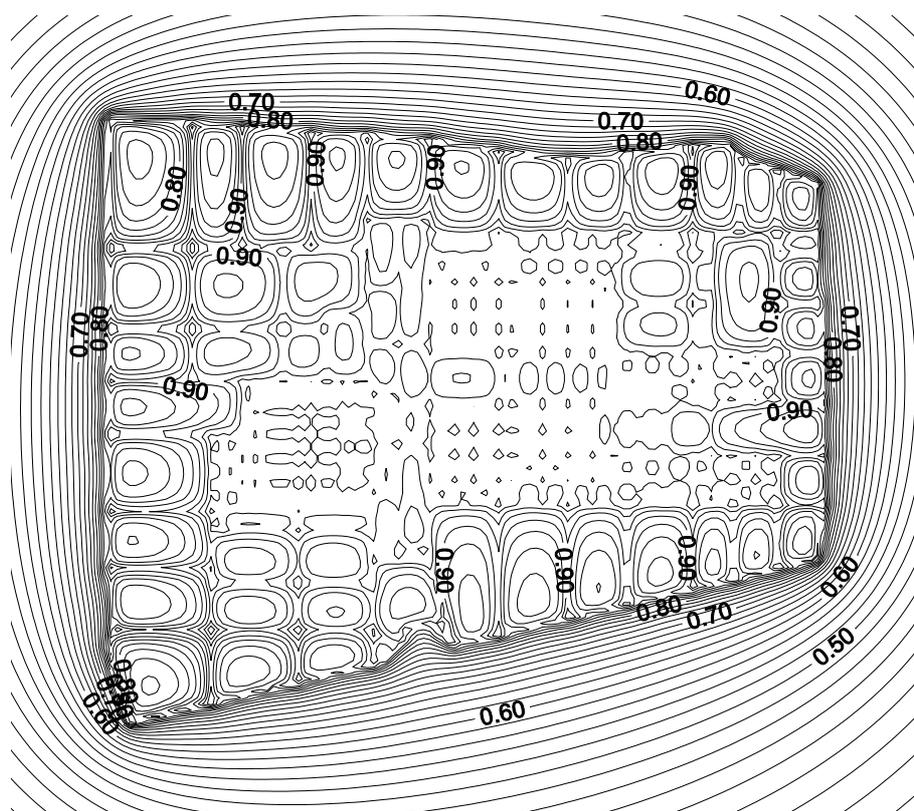


Figura 10: Subestación Santiago II: Distribución de potencial sobre la superficie del terreno (en tanto por uno del GPR).

obtener resultados de mayor precisión para un esfuerzo computacional similar (el menor coste asociado a la resolución del sistema de ecuaciones se compensa con el mayor coste asociado a la generación de la matriz).

#### 8.4. Refinamiento de la Discretización

Los ejemplos presentados han sido resueltos repetidamente incrementando la segmentación de los conductores. Como la teoría predice (y ha sido documentado en la literatura) las inestabilidades numéricas perturban totalmente la solución cuando la discretización se refina más allá de determinado punto. En cualquier caso, un nivel de discretización moderado permite obtener resultados suficientemente precisos en la práctica.

En nuestra experiencia, aumentar fuertemente el número de elementos no aporta ventajas significativas a la escala del conjunto. Parece, por tanto, que refinar la discretización sólo está justificado cuando se requieren resultados de gran precisión en una zona determinada.

Por otro lado, utilizar elementos de orden más elevado (lineal o cuadrático) parece ser más ventajoso (en general) que refinar intensivamente la discretización, puesto que la precisión que se obtiene es mayor para un número de grados de libertad significativamente menor [14].

#### 8.5. Otros Desarrollos

Las técnicas descritas en este artículo pueden extenderse a modelos multicapa [33, 34], aunque los tiempos de computación crecen de forma muy importante. La correspondiente formulación ha sido implementada en un supercomputador paralelo, y el programa ha sido aplicado al análisis de varias tomas a tierra de subestaciones reales [33, 34, 35].

Los resultados obtenidos por los autores con modelos multicapa difieren notablemente de los correspondientes a un modelo del suelo homogéneo e isótropo. Por ello, los autores creen que la formulación propuesta para modelos multicapa deberá ser la herramienta de diseño en tiempo real que se utilice en un futuro próximo, a medida que la supercomputación en paralelo se convierta en un recurso ampliamente disponible para los ingenieros.

La formulación también ha sido adaptada para calcular potenciales transferidos [14].

## 9. Conclusiones

En este artículo se ha presentado una formulación de elementos de contorno para el análisis de tomas de tierra de subestaciones eléctricas. La formulación propuesta se basa en la solución de una ecuación integral de Fredholm mediante el Método de Elementos de Contorno. La solución de la ecuación integral proporciona la densidad de corriente que emana de la superficie de la malla conductora, a partir de la cual se puede evaluar de forma sencilla tanto la resistencia equivalente del sistema como el potencial en cualquier punto de la superficie del terreno. La introducción de una serie de hipótesis razonables permite reducir la formulación general de Elementos de Contorno 2D a una formulación simplificada 1D con requerimientos computacionales aceptables. A su vez, el desarrollo de técnicas analíticas de integración específicas para la formulación 1D simplificada, y la utilización de métodos semi-iterativos para la resolución de los sistemas de ecuaciones involucrados, permite reducir drásticamente el coste computacional.

Nuestra formulación incluye a los denominados métodos matriciales, ampliamente utilizados en la práctica. Estos métodos se identifican como las variantes más sencillas de la formulación simplificada para elecciones específicas de las funciones de prueba y de test (elementos de densidad de corriente constante, ponderación por colocación puntual, etc.). Por ello, en el marco de esta formulación es posible explicar y cuantificar, desde un punto de vista matemáticamente riguroso, las anomalías encontradas a lo largo del tiempo en la aplicación de este tipo de métodos, y desarrollar nuevas formulaciones más eficientes y precisas.

Esta formulación de elementos de contorno se ha implementado en el sistema TOTBEM [31, 32] de Diseño Asistido por Ordenador de tomas de tierra para subestaciones eléctricas desarrollado por los autores a lo largo de los últimos diez años. En la actualidad, el sistema permite resolver interactivamente problemas reales de ingeniería en ordenadores personales de gama media. Mediante una sencilla extensión de la formulación ya es posible resolver un problema de gran importancia desde el punto de vista de la seguridad: la transferencia de potencial a través de otros conductores. Por otro lado, la formulación es enteramente paralelizable, lo que permite resolver problemas de extraordinaria complejidad (modelos multicapa) utilizando recursos de supercomputación.

La viabilidad y eficacia de la técnica desarrollada se ha demostrado mediante su aplicación a varios ejemplos reales.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por las empresas Fuerzas Eléctricas de Catalunya (FECSA), Unión Fenosa y Unión Fenosa Ingeniería (UFISA), por proyectos de investigación de la CICYT, y de la Xunta de Galicia, por los fondos FEDER de la Unión Europea, y por ayudas de investigación la Universidad de A Coruña.

## Apéndice I:

### Expresión Integral para el Potencial

Pretendemos obtener una expresión integral para la solución  $V(\mathbf{x})$  del problema (1) en un punto arbitrario  $\mathbf{x}$  en  $E$ . Suponemos que la superficie del terreno  $\Gamma_E$  es horizontal.

En primer lugar, extendemos el dominio  $E$  añadiendo su simétrico respecto al plano  $\Gamma_E$ . Sea  $\Omega(\infty)$  el dominio extendido (infinito). Sea  $\Omega(R) \subset \Omega(\infty)$  un subdominio finito, y sea  $R$  su diámetro. Sea  $\Gamma_{\Omega(R)}$  el contorno exterior de  $\Omega(R)$ . Sea  $\Gamma'$  la imagen de la superficie del electrodo  $\Gamma$  respecto al plano  $\Gamma_E$ . Suponemos que el valor de  $R$  es suficientemente grande. Así, la toma de tierra y su simétrica están embebidas —pero no incluidas— en  $\Omega(R)$  (véase la figura 11).

El suelo se considera homogéneo e isótropo. Por tanto, el tensor  $\boldsymbol{\gamma}$  se sustituye por la conductividad escalar constante  $\gamma$ . En estos términos, el problema (1) se puede sustituir por el Problema Exterior de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta V(\mathbf{z}) &= 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \Omega(\infty), \\ V(\boldsymbol{\xi}) &= V_\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \Gamma, \quad V(\boldsymbol{\xi}') = V_\Gamma \quad \forall \boldsymbol{\xi}' \in \Gamma', \\ V(\mathbf{z}) &\text{ verifica condiciones normales cuando } |\mathbf{z}| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (37)$$

puesto que la condición de contorno natural  $\boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E = 0$  en  $\Gamma_E$  se satisface automáticamente debido a la simetría del dominio extendido. Las denominadas condiciones normales en el infinito pueden ser expresadas matemáticamente como [8, 9]

$$\begin{aligned} |V(\mathbf{z})| &= O(|\mathbf{z}|^{-1}) \quad \text{cuando } |\mathbf{z}| \rightarrow \infty, \quad \text{y} \\ |\mathbf{grad}(V(\mathbf{z}))| &= O(|\mathbf{z}|^{-2}) \quad \text{cuando } |\mathbf{z}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (38)$$

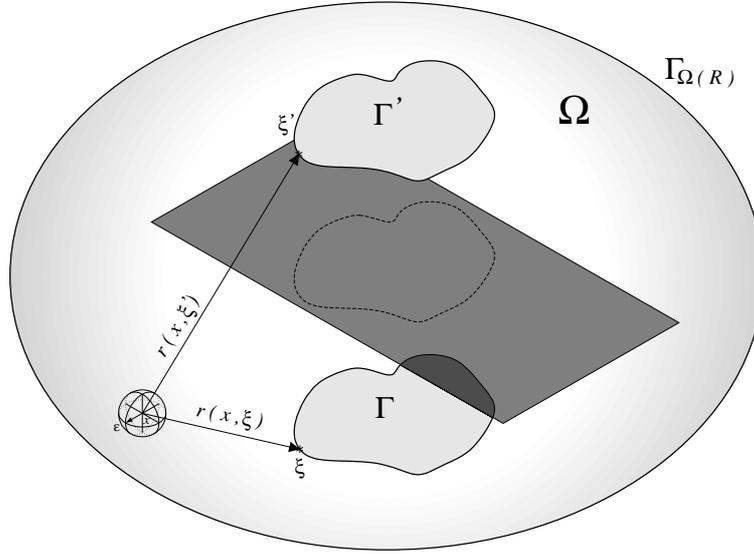


Figura 11: Dominio extendido simétrico para el problema (1).

Para el punto dado  $\mathbf{x}$ , la denominada solución fundamental [36] para el problema anterior es

$$\Psi(\mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi r(\mathbf{x}, \mathbf{z})}, \quad r(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = |\mathbf{x} - \mathbf{z}|, \quad (39)$$

donde  $|\mathbf{x} - \mathbf{z}|$  es la distancia euclídea entre los puntos  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{z}$ . Es sencillo comprobar que esta función satisface el enunciado

$$\begin{aligned} \Delta \Psi(\mathbf{z}) &= \delta(\mathbf{z} - \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{z} \in \Omega(\infty), \\ \Psi(\mathbf{z}) &\text{ verifica condiciones normales cuando } |\mathbf{z}| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (40)$$

siendo  $\delta$  la distribución delta de Dirac. Por tanto, la solución fundamental se puede interpretar como la solución particular del problema para una fuente puntual de corriente situada en el punto dado  $\mathbf{x}$  [36].

El Laplaciano de la solución fundamental (39) es obviamente singular en  $\mathbf{z} = \mathbf{x}$ , pero se anula en cualquier otro punto. Para evitar la singularidad definimos la bola  $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$  de radio  $\varepsilon$  centrada en el punto  $\mathbf{x}$  (véase la figura 11). Sea  $\Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}$  el contorno de  $B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ .

Consideremos el dominio cerrado  $D(R, \varepsilon) = \Omega(R) - B(\mathbf{x}, \varepsilon)$ . Obviamente, tanto  $V(\mathbf{z})$  como  $\Psi(\mathbf{z})$  son funciones de clase  $C^2$  en  $D(R, \varepsilon)$ . Por tanto, podemos aplicar la segunda identidad de Green [20, 14] a nuestro

problema. Obtenemos

$$\begin{aligned} \iiint_{\mathbf{z} \in D(R, \varepsilon)} (V(\mathbf{z}) \Delta \Psi(\mathbf{z}) - \Psi(\mathbf{z}) \Delta V(\mathbf{z})) dD = \\ \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_D(R, \varepsilon)} \left( V(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Psi}{\partial n_D}(\boldsymbol{\xi}) - \Psi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial V}{\partial n_D}(\boldsymbol{\xi}) \right) d\Gamma_D, \end{aligned} \quad (41)$$

donde  $\Gamma_D(R, \varepsilon)$  es el contorno del dominio  $D(R, \varepsilon)$  y  $\mathbf{n}_D$  es el correspondiente vector normal exterior unitario.

Ambas funciones,  $V(\mathbf{z})$  y  $\Psi(\mathbf{z})$ , son armónicas en  $D(R, \varepsilon)$ , puesto que (37) y (40) se satisfacen y la singularidad en  $\mathbf{z} = \mathbf{x}$  ha sido aislada. Por consiguiente, el miembro de la izquierda de (41) se anula, lo que da

$$\iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_D(R, \varepsilon)} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D = 0. \quad (42)$$

siendo

$$\Upsilon(\boldsymbol{\xi}) = V(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial \Psi}{\partial n_D}(\boldsymbol{\xi}) - \Psi(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial V}{\partial n_D}(\boldsymbol{\xi}). \quad (43)$$

Finalmente, es obvio que (42) se cumple para valores arbitrariamente grandes de  $R$  y valores arbitrariamente pequeños de  $\varepsilon$ . Por tanto, podemos escribir

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_D(R, \varepsilon)} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D = 0. \quad (44)$$

El contorno exterior de  $D(R, \varepsilon)$  es  $\Gamma_{\Omega(R)}$ . El contorno interior de  $D(R, \varepsilon)$  consiste en los contornos exteriores de 1) el electrodo ( $\Gamma$ ), 2) su imagen ( $\Gamma'$ ), y 3) la bola que aísla la singularidad ( $\Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}$ ). Por tanto

$$\Gamma_D = \Gamma_{\Omega(R)} \cup \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \cup \Gamma \cup \Gamma'. \quad (45)$$

y

$$\begin{aligned} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_D(R, \varepsilon)} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D = \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{\Omega(R)}} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D + \\ \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_{B(\mathbf{x}, \varepsilon)}} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D + \\ \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D + \\ \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma'} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D \end{aligned} \quad (46)$$

Considerando que (39) da  $\Upsilon(\boldsymbol{\xi})$  para todo  $\boldsymbol{\xi}$  en  $\Gamma_D$ , y  $V(\mathbf{z})$  satisface (37) y (38), podemos probar que [14]

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Omega(R)} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_B(\mathbf{x}, \varepsilon)} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D &= V(\mathbf{x}), \\ \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \frac{\partial V}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \\ \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma'} \Upsilon(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma_D &= \frac{1}{4\pi} \iint_{\boldsymbol{\xi}' \in \Gamma'} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')} \frac{\partial V}{\partial n'}(\boldsymbol{\xi}') d\Gamma', \end{aligned} \quad (47)$$

siendo  $\mathbf{n}$  y  $\mathbf{n}'$  los vectores normales exteriores unitarios a  $\Gamma$  y  $\Gamma'$  respectivamente.

Por tanto (44) se reduce a

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} \frac{\partial V}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma + \\ &\quad -\frac{1}{4\pi} \iint_{\boldsymbol{\xi}' \in \Gamma'} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')} \frac{\partial V}{\partial n'}(\boldsymbol{\xi}') d\Gamma'. \end{aligned} \quad (48)$$

Finalmente, podemos aprovecharnos de la simetría para escribir [13, 14, 15]

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad (49)$$

siendo

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}) = -\gamma \frac{\partial V}{\partial n}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \Gamma \quad (50)$$

y

$$k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left( \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} + \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}')} \right), \quad (51)$$

donde  $\boldsymbol{\xi}'$  es el simétrico de  $\boldsymbol{\xi}$  respecto a la superficie del terreno. La función  $\sigma(\boldsymbol{\xi})$  en (50) se identifica claramente como la densidad de corriente de pérdida en un punto arbitrario  $\boldsymbol{\xi}$  sobre el electrodo  $\Gamma$ .

Con estas suposiciones podemos probar también que (49) se verifica sobre la superficie del electrodo, lo que nos permite escribir

$$V(\boldsymbol{\chi}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma. \quad (52)$$

Esto no es ni obvio ni trivial, y la prueba requiere una discusión especial [14]. En este caso, el núcleo (51) es singular en  $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\chi}$ . Puesto que (52) tiene sentido, a pesar de la singularidad, se dice que (51) es un núcleo débilmente singular.

Nótese que la expresión (49) siempre satisface la ecuación de campo, la condición de contorno natural y las condiciones normales en el infinito del problema (1). Por tanto, lo único que falta para resolver el problema es que se satisfaga la condición de contorno esencial  $V = V_\Gamma$  en  $\Gamma$ . Impondremos este requisito mediante (52). Por consiguiente, nuestro problema se reduce a encontrar la distribución de la densidad de corriente de pérdida incógnita  $\sigma(\boldsymbol{\xi})$  en  $\Gamma$  que verifica

$$V_\Gamma = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma. \quad (53)$$

Una vez se conozca la distribución de la densidad de corriente de pérdida, se podrá calcular el potencial en cualquier punto mediante la expresión (49).

## Referencias

- [1] ANSI/IEEE. Std.80–2000 Guide for Safety in AC Substation Grounding. *IEEE*, New York, 2000.
- [2] J.G. Sverak, W.K. Dick, T.H. Dodds and R.H. Heppe. Safe Substation Grounding, Part I. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 100:4281–4290, 1981.
- [3] J.G. Sverak, W.K. Dick, T.H. Dodds and R.H. Heppe. Safe Substation Grounding, Part II. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 101:4006–4023, 1982.
- [4] J.G. Sverak. Progress in Step and Touch Voltage Equations of ANSI/IEEE Std 80. Historical Perspective. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 13:762–767, 1998.
- [5] R.J. Heppe. Computation of potential at surface above an energized grid or other electrode, allowing for non-uniform current distribution. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 98:1978–1988, 1979.

- [6] D.L. Garrett and J.G. Pruitt. Problems encountered with the Average Potential Method of analyzing substation grounding systems. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 104:3586–3596, 1985.
- [7] B. Thapar, V. Gerez, A. Balakrishnan and D.A. Blank. Simplified Equations for Mesh and Step Voltages in AC Substation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 6:601–607, 1991.
- [8] E. Durand. *Électrostatique*, Masson, Paris, 1966.
- [9] O.D. Kellog. *Foundations of Potential Theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [10] P.P. Silvester and R.L. Ferrari. *Finite Elements for Electrical Engineers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [11] Ll. Moreno. *Disseny assistit per ordinador de postes a terra en instal·lacions elèctriques*. Tesina de Especialidad ETSECCPB, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1989.
- [12] F. Navarrina, L. Moreno, E. Bendito, A. Encinas, A. Ledesma and M. Casteleiro. Computer Aided Design of Grounding Grids: A Boundary Element Approach. In: M. Heiliö (Ed.), *Mathematics in Industry*, 307–314, Kluwer Academic Pub., Dordrecht, 1991.
- [13] F. Navarrina, I. Colominas and M. Casteleiro. Analytical Integration Techniques for Earthing Grid Computation by BEM. In: H. Alder, J.C. Heinrich, S. Lavanchy, E. Oñate, B. Suárez (Eds.), *Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, 1197–1206, CIMNE Pub., Barcelona, 1992.
- [14] I. Colominas. *Cálculo y Diseño por Ordenador de Tomas de Tierra en Instalaciones Eléctricas: Una Formulación Numérica basada en el Método Integral de Elementos de Contorno*. Tesis Doctoral, Universidad de A Coruña, 1995.
- [15] I. Colominas, F. Navarrina and M. Casteleiro. A Boundary Element Numerical Approach for Grounding Grid Computation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 174:73–90, 1999.

- [16] F.P. Dawalibi and D. Mudhekar. Optimum Design of Substation Grounding in a Two-Layer Earth Structure. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 94:252–272, 1975.
- [17] H.S. Lee, J.H. Kim, F.P. Dawalibi and J. Ma. Efficient Ground Designs in Layered Soils. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 13:745–751, 1998.
- [18] E.D. Sunde. *Earth Conduction Effects in Transmission Systems*. McMillan, New York, 1968.
- [19] I. Colominas, J. Aneiros, F. Navarrina and M. Casteleiro. A Boundary Element Numerical Approach for Substation Grounding in a Two Layer Earth Structure. *Proceedings of the International Conference on Computational Engineering Science (ICES'97)*, San José, 1997.
- [20] I. Stakgold. *Boundary Value Problems of Mathematical Physics*. MacMillan Co., London, 1970.
- [21] I. Stakgold. *Green's functions and boundary value problems*. John Wiley and Sons, New York, 1979.
- [22] M. Kurtovic and S. Vujevic. Potential of Earthing Grid in Heterogeneous Soil. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 31:677–688, 1991.
- [23] I. Colominas, F. Navarrina and M. Casteleiro. A Validation of the Boundary Element Method for Grounding Grid Design and Computation. In: H. Alder, J.C. Heinrich, S. Lavanchy, E. Oñate, B. Suárez (Eds.), *Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, 1187–1196, CIMNE Pub., Barcelona, 1992.
- [24] C. Johnson. *Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.
- [25] T.J.R. Hughes. *The Finite Element Method*. Prentice Hall, New Jersey, 1987.
- [26] R. Dautray et J.L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques (vol. 6)*. Masson, Paris, 1988.

- [27] I. Colominas, F. Navarrina and M. Casteleiro. Fórmulas analíticas de integración para el cálculo de tomas de tierra mediante el método de los elementos de contorno (BEM). In: F. Navarrina, M. Casteleiro (Eds.), *Métodos Numéricos en Ingeniería*, 2:855–864, SEMNI, Barcelona, 1992.
- [28] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin. *Introductory Real Analysis*. Dover Publications, New York, 1975.
- [29] G. Pini and G. Gambolati. Is a Simple Diagonal Scaling The Best Preconditioner For Conjugate Gradients on Supercomputers? *Advances on Water Resources*, 13:147–153, 1990.
- [30] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Yousef Saad, <<http://www-users.cs.umn.edu/~saad/books.html>>, 2000.
- [31] M. Casteleiro, L.A. Hernández, I. Colominas and F. Navarrina. *Memoria y Manual de Usuario del Sistema TOTBEM para Cálculo y Diseño Asistido por Ordenador de Tomas de Tierra de Instalaciones Eléctricas*. E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad de A Coruña, 1994.
- [32] I. Colominas, F. Navarrina and M. Casteleiro, A Boundary Element Formulation for the Substation Grounding Design. *Advances in Engineering Software*, 30:693–700, 1999.
- [33] I. Colominas, J. Gómez Calviño, F. Navarrina and M. Casteleiro. Computer Analysis of Earthing Systems in Horizontally or Vertically Layered Soils. *Electric Power Systems Research*, 59:149–156, 2001.
- [34] I. Colominas, F. Navarrina and M. Casteleiro. A Numerical Formulation for Grounding Analysis in Stratified Soils. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 17:587–595, 2002.
- [35] I. Colominas, F. Navarrina, G. Mosqueira, J.M. Eiroa and M. Casteleiro. Numerical Modelling of Grounding Systems in High-Performance Parallel Computers. In: C.A. Brebbia and H. Power (Eds.), *Boundary Elements XXII*, WIT Press, Southampton, 2000.
- [36] M. Bonnet. *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids*. John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 1995.