

# CÁLCULO Y DISEÑO ASISTIDO POR ORDENADOR DE TOMAS DE TIERRA CON MODELOS DE SUELO NO UNIFORMES

Ignasi Colominas, Juan Aneiros, Fermín Navarrina y Manuel Casteleiro\*

Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación  
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad de La Coruña, Campus de Elviña, 15071— La Coruña, España

## RESUMEN

El análisis y diseño de tomas de tierra de subestaciones eléctricas requiere el cálculo de la distribución de potencial en la superficie del terreno —por motivos de seguridad humana—, y la determinación de la resistencia equivalente del sistema de tierra —para garantizar la protección de los equipos— cuando tiene lugar una situación de fallo [1].

En este artículo se presenta una formulación numérica basada en el Método de Elementos de Contorno para el cálculo de tomas de tierra de subestaciones eléctricas incorporando modelos de suelo no uniformes. La formulación se ha derivado especialmente para modelos de terreno de dos capas, dado que es el modelo más ampliamente aceptado para el análisis de casos prácticos. La viabilidad de esta formulación de elementos de contorno se demuestra mediante la resolución de un caso de aplicación real, obteniéndose resultados de gran precisión para la resistencia equivalente y la distribución del potencial en la superficie del terreno con requerimientos computacionales aceptables.

## ABSTRACT

Analysis and design of substation grounding requires computing the distribution of potential on the earth surface —for reasons of human security— and the equivalent resistance of the earthing system —for reasons of equipment protection— when fault conditions occur [1].

A new Boundary Element approach for the numerical computation of substation grounding systems in nonuniform soils is presented in this paper. The formulation is specially derived for two-layer soil models, which are widely considered as adequate for most practical cases. The feasibility of this BEM approach is demonstrated by solving a real application problem, in which accurate results for the equivalent resistance and the potential distribution on the ground surface are obtained with acceptable computing requirements.

## INTRODUCCIÓN

En las últimas tres décadas se han propuesto un número importante de métodos para el cálculo y diseño de tomas de tierra de grandes instalaciones eléctricas. La mayor parte de estas técnicas están basadas en trabajos semiempíricos o fundamentadas en ideas intuitivas, tales como la superposición de fuentes puntuales de corriente o de promediado del error [2]. Aunque el desarrollo de estos métodos ha significado un

---

\* E-mail→ colominas@etsicpc.udc.es, navarrina@etsicpc.udc.es, casteleiro@udc.es

importante avance en el análisis y cálculo de sistemas de puesta a tierra, se han constatado una serie de problemas importantes: Aplicación limitada a disposiciones muy simples de los electrodos de tierra en modelos de suelo uniforme, elevados requerimientos computacionales, resultados poco realistas cuando se aumenta la segmentación de los conductores, e incertidumbre en el margen de error [3].

En los últimos años, la formulación numérica basada en el Método de Elementos de Contorno desarrollada por los autores [4] ha permitido identificar esta familia de métodos intuitivos como el resultado de introducir ciertas hipótesis simplificadoras en la formulación general de elementos de contorno con el fin de reducir su coste computacional, para elecciones específicas de las funciones de prueba y de test. De este modo, se ha podido explicar matemáticamente el anómalo comportamiento asintótico de esta clase de métodos, y se han apuntado las diversas fuentes de error [5]. Por otra parte, esta formulación general de elementos de contorno ha sido aplicada con éxito, y con un coste computacional muy razonable, en el análisis de grandes sistemas de tomas de tierra de subestaciones eléctricas [6].

El fenómeno físico de la disipación de corriente eléctrica en el interior de un terreno a través de una malla de electrodos de tierra puede analizarse mediante la Teoría del Electromagnetismo de Maxwell [7]. Así, limitando el análisis a la obtención de la respuesta electrocinética en estado estacionario, y despreciando la resistencia eléctrica interna de los conductores de tierra, el problema 3D asociado puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= 0, & \boldsymbol{\sigma} &= -\boldsymbol{\gamma} \operatorname{grad} V \text{ en } E; \\ \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E &= 0 \text{ en } \Gamma_E; & V &= V_\Gamma \text{ en } \Gamma; & V &\longrightarrow 0, \text{ si } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (1)$$

siendo  $E$  el terreno,  $\boldsymbol{\gamma}$  su tensor de conductividad,  $\Gamma_E$  la superficie del terreno,  $\mathbf{n}_E$  su versor normal exterior unitario y  $\Gamma$  la superficie de los electrodos de tierra [4,5].

La solución de este problema proporciona el potencial  $V$  y la densidad de corriente  $\boldsymbol{\sigma}$  en un punto arbitrario  $\mathbf{x}$  cuando el electrodo de tierra adquiere un potencial  $V_\Gamma$  —“Sobretensión de Tierra” o *Ground Potential Rise, GPR*— respecto a un punto de una puesta a tierra remota. Dado que  $V$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  son proporcionales al valor de la Sobretensión de Tierra, la condición de contorno  $V_\Gamma = 1$  no es en absoluto restrictiva, por lo que se empleará en lo sucesivo.

En estos términos, la densidad de corriente de pérdida  $\boldsymbol{\sigma}$  que emana de un punto arbitrario de la superficie de los electrodos, la Intensidad Total de corriente que emana de la toma de tierra  $I_\Gamma$  y la Resistencia Equivalente del sistema electrodo-terreno  $R_{eq}$  pueden escribirse como

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}, \quad I_\Gamma = \int \int_\Gamma \boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\Gamma}, \quad R_{eq} = \frac{V_\Gamma}{I_\Gamma}, \quad (2)$$

siendo  $\mathbf{n}$  el versor normal exterior a  $\Gamma$ .

En la mayoría de los métodos propuestos hasta este momento se asume que, en la práctica, el terreno puede ser considerado homogéneo e isótropo. Así, el tensor de conductividad  $\boldsymbol{\gamma}$  puede sustituirse por una conductividad escalar aparente  $\gamma$  que se determina experimentalmente [1]. En general, se considera que esta hipótesis no introduce errores significativamente importantes si el terreno es esencialmente uniforme —horizontal y verticalmente— hasta una distancia de tres a cinco veces la dimensión de la mayor diagonal de la malla de electrodos que forman el sistema de toma de tierra, medida desde su perímetro [8]. Sin embargo, los parámetros que es preciso determinar para el correcto diseño de una malla de tierra pueden variar de forma importante

si la conductividad del suelo cambia de una parte a otra en el emplazamiento de la subestación eléctrica. En consecuencia, parece razonable desarrollar modelos más precisos que tengan en cuenta la variación de la conductividad del terreno en los alrededores del sistema de toma de tierra.

En este punto, es obvio que el desarrollo completo de modelos que describan todas las variaciones de la conductividad del suelo en las inmediaciones de una subestación sería inabordable, tanto desde el punto de vista técnico como económico. Por esta razón, una aproximación más práctica —y también bastante más realista— en los casos en los que la conductividad del terreno no sea uniforme con la profundidad, consiste en considerar el terreno estratificado en un número determinado de capas horizontales de distinto espesor, cuya conductividad escalar aparente se obtiene experimentalmente. De hecho, se acepta ampliamente que los modelos de terreno de dos capas son suficientes para obtener buenos diseños de los sistemas de puesta a tierra en la mayor parte de los casos prácticos reales [1,8].

Así, si se considera el suelo constituido por dos estratos de diferente conductividad, el problema matemático (1) se reduce al siguiente problema elíptico exterior mixto, cuando la malla de tierra se encuentra situada en la capa superior:

$$\begin{aligned} \Delta V_1 = 0 \quad \text{en } E_1, \quad \Delta V_2 = 0 \quad \text{en } E_2; \\ \frac{dV_1}{dn} = 0 \quad \text{en } \Gamma_E, \quad V_1 = V_2 \quad \text{en } \Gamma_L, \quad \gamma_1 \frac{dV_1}{dn} = \gamma_2 \frac{dV_2}{dn} \quad \text{en } \Gamma_L, \\ V_1 = V_\Gamma \quad \text{en } \Gamma, \quad V_1 \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad V_2 \rightarrow 0 \quad \text{si } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3)$$

siendo  $E_1$  y  $E_2$  las capas superior e inferior del terreno,  $\Gamma_L$  la interfase entre ambas,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  las conductividades escalares aparentes de cada estrato, y  $V_1$  y  $V_2$  las respectivas expresiones del potencial en puntos de cada una de las capas [9,10]. Evidentemente, en el caso de que la malla de electrodos esté emplazada en el estrato inferior del terreno ( $V_2 = V_\Gamma$  en  $\Gamma$ ), el planteamiento de las ecuaciones del consiguiente problema exterior mixto [10] es análogo a (3).

## PLANTEAMIENTO VARIACIONAL DEL PROBLEMA

En la mayoría de las instalaciones eléctricas, el electrodo de toma de tierra está formado por una malla de conductores cilíndricos interconectados, enterrados horizontalmente o bien clavados verticalmente, cuya relación diámetro/longitud suele ser relativamente pequeña ( $\sim 10^{-3}$ ). Obviamente, en la práctica no es posible la obtención de soluciones analíticas a este tipo de problemas. Por otra parte, el empleo de técnicas numéricas estándar —Elementos Finitos o Diferencias Finitas— requiere la discretización de los dominios  $E_1$  y  $E_2$ , por lo que la obtención de resultados suficientemente precisos implicaría unas necesidades computacionales prohibitivas tanto en memoria como en tiempo de CPU.

Sin embargo, en este punto es de destacar que en el diseño de una toma de tierra el cálculo del potencial tan sólo es preciso en la superficie del terreno  $\Gamma_E$ , y la resistencia equivalente puede obtenerse fácilmente a partir de la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$ , mediante (2). En consecuencia, se ha optado por desarrollar una formulación basada en el Método de Elementos de Contorno, que requerirá solamente la discretización de la superficie de los electrodos  $\Gamma$  y permitirá reducir el problema tridimensional a uno bidimensional.

Por otra parte, si se asume que la superficie del terreno  $\Gamma_E$  y la interfase entre las dos capas de terreno distintas  $\Gamma_L$  son horizontales, la simetría —método de las imágenes— permite reescribir el problema (3) en términos de un Problema Exterior de Dirichlet

[5,10]. Esta hipótesis de superficies horizontales es bastante adecuada dado que, en la práctica, el terreno en el que se construye la instalación eléctrica y sus alrededores se regularizan previamente a la colocación de los equipos y ejecución de los viales y zonas de servicios.

La aplicación de la Identidad de Green [6,10] a este Problema Exterior de Dirichlet permite obtener las siguientes expresiones integrales para los potenciales  $V_1(\mathbf{x}_1)$  y  $V_2(\mathbf{x}_2)$ , en sendos puntos arbitrarios  $\mathbf{x}_1 \in E_1$  y  $\mathbf{x}_2 \in E_2$ , en términos de la densidad de corriente de pérdida  $\sigma(\boldsymbol{\xi})$  en un punto  $\boldsymbol{\xi}$  —de coordenadas  $[\xi_x, \xi_y, \xi_z]$ — sobre la superficie de los electrodos  $\Gamma$ :

$$V_1(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{4\pi\gamma_1} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{11}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{x}_1 \in E_1; \quad (4)$$

$$V_2(\mathbf{x}_2) = \frac{1}{4\pi\gamma_1} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{12}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{x}_2 \in E_2; \quad (5)$$

siendo  $k_{11}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi})$  y  $k_{12}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi})$  los núcleos débilmente singulares

$$\begin{aligned} k_{11}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}) = & \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} + \frac{1}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -\xi_z])} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, 2iH + \xi_z])} + \frac{\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, 2iH - \xi_z])} \right. \\ & \left. + \frac{\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -2iH + \xi_z])} + \frac{\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -2iH - \xi_z])} \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} k_{12}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}) = & \frac{1 + \kappa}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} + \frac{1 + \kappa}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, -\xi_z])} \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{(1 + \kappa)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, 2iH + \xi_z])} + \frac{(1 + \kappa)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, 2iH - \xi_z])} \right]; \end{aligned} \quad (7)$$

donde  $r(\mathbf{x}, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])$  es la distancia del punto  $\mathbf{x}$  al  $\boldsymbol{\xi} \equiv [\xi_x, \xi_y, \xi_z]$  —y a los puntos simétricos a  $\boldsymbol{\xi}$  respecto de la superficie del terreno  $\Gamma_E$  y de la superficie de la interfase entre los estratos  $\Gamma_L$ , y que aparecen en los distintos términos de (6) y (7)—,  $H$  es el espesor del estrato superior del suelo, y  $\kappa$  es la relación existente entre las conductividades escalares de cada capa [10,11],

$$\kappa = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (8)$$

En el caso de que la malla de tierra se encuentre situada en la capa inferior del terreno, la aplicación de la Identidad de Green [10] proporciona unas expresiones análogas a (4) y (5) para los potenciales  $V_1$  y  $V_2$  en cada uno de los dos estratos, que vienen dadas por

$$V_1(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{4\pi\gamma_2} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{21}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{x}_1 \in E_1; \quad (4a)$$

$$V_2(\mathbf{x}_2) = \frac{1}{4\pi\gamma_2} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{22}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \forall \mathbf{x}_2 \in E_2; \quad (5a)$$

siendo  $k_{21}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi})$  y  $k_{22}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi})$  los núcleos débilmente singulares

$$k_{21}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1 - \kappa}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} + \frac{1 - \kappa}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -\xi_z])} + \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{(1 - \kappa)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, -2iH + \xi_z])} + \frac{(1 - \kappa)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_1, [\xi_x, \xi_y, 2iH - \xi_z])} \right]; \quad (6a)$$

$$k_{22}(\mathbf{x}_2, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, \xi_z])} + \frac{1 - \kappa^2}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, -\xi_z])} + \frac{-\kappa}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, 2H + \xi_z])} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(1 - \kappa^2)\kappa^i}{r(\mathbf{x}_2, [\xi_x, \xi_y, -2iH + \xi_z])}. \quad (7a)$$

Como puede observarse, las expresiones integrales de los potenciales en el terreno en las dos situaciones de emplazamiento de la malla de tierra —(4), (5), (4a) y (5a)— son esencialmente del mismo tipo, y las diferencias en las expresiones explícitas de los núcleos integrales —(6), (7), (6a) y (7a)— son consecuencia de la aplicación del método de las imágenes para cada uno de los casos [9,10,11]. Dado que el planteamiento variacional del problema y la posterior derivación de una formulación numérica para su resolución son análogos en las dos situaciones, en todo el desarrollo que se presenta a continuación en este artículo se considerará que la malla está en la capa superior.

En este caso, y dado que (4) se verifica también sobre la superficie de los electrodos de tierra  $\Gamma$  y el potencial en este contorno es la Sobretensión de Tierra ( $V_1(\boldsymbol{\chi}) = 1$ ,  $\forall \boldsymbol{\chi} \in \Gamma$ ), la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$  satisface la ecuación integral de Fredholm de primera clase definida en  $\Gamma$  [5]:

$$1 = \frac{1}{4\pi\gamma_1} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{11}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma, \quad \boldsymbol{\chi} \in \Gamma. \quad (9)$$

Finalmente, una forma variacional más débil [6] de la ecuación (9) puede ahora escribirse como:

$$\iint_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma} w(\boldsymbol{\chi}) \left( \frac{1}{4\pi\gamma_1} \iint_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k_{11}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) d\Gamma - 1 \right) d\Gamma = 0. \quad (10)$$

que debe verificarse para todo miembro  $w(\boldsymbol{\chi})$  de una clase adecuada de funciones de test definidas en  $\Gamma$ .

Obviamente, una formulación de Elementos de Contorno parece ser la mejor elección para la resolución de la forma variacional (10). Así, dados un conjunto de elementos de contorno 2D y un conjunto de funciones de prueba definidas en  $\Gamma$ , pueden discretizarse la superficie de los electrodos que forman la malla de tierra y la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$  [5].

Finalmente, dado un conjunto de funciones de test definidas en  $\Gamma$ , la forma variacional (10) se reduce a un sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz de coeficientes es llena [6]. Sin embargo, es obvio que las discretizaciones 2D que se precisan para el análisis de problemas reales obligarían a manipular un número extremadamente alto de grados de libertad. Ello, unido al hecho de que el cálculo de cada coeficiente de la matriz del sistema de ecuaciones requiere evaluar un número muy elevado de términos del núcleo  $k_{11}(\boldsymbol{\chi}, \boldsymbol{\xi})$  mediante (6), así como efectuar integraciones en dominios 2D que deben realizarse dos veces sobre la superficie de cada uno de los electrodos [10], justifica la necesidad de introducir algunas simplificaciones adicionales en la formulación de elementos de contorno con el fin de reducir su gran coste computacional [6].

## FORMULACIÓN DE ELEMENTOS DE CONTORNO 1D APROXIMADA

Con este objetivo, y considerando las características geométricas reales de las mallas de tierra de la mayoría de las instalaciones eléctricas, se puede considerar que la densidad de corriente es constante en la sección transversal del electrodo cilíndrico [4]. Esta hipótesis de uniformidad circunferencial es ampliamente empleada en la mayor parte de los estudios teóricos y métodos prácticos recogidos en la bibliografía [1,8].

Así, sean  $L$  el conjunto completo de los ejes de los conductores enterrados,  $\hat{\xi} \in L$  la proyección ortogonal de un punto genérico  $\xi \in \Gamma$  sobre el eje del electrodo cilíndrico,  $\phi(\hat{\xi})$  el diámetro del conductor, y  $\hat{\sigma}(\hat{\xi})$  la densidad de corriente aproximada que emana —asumida uniforme— de la sección transversal del conductor correspondiente al punto del eje  $\hat{\xi}$ . En estos términos, y siendo  $\bar{k}_{11}(\mathbf{x}, \hat{\xi})$  y  $\bar{k}_{12}(\mathbf{x}, \hat{\xi})$  el promedio de los núcleos integrales (6) y (7) en la sección transversal en  $\hat{\xi}$ , se pueden reescribir (4) y (5) obteniéndose las expresiones aproximadas del potencial en las dos capas del terreno [6]:

$$\hat{V}_1(\mathbf{x}_1) = \frac{1}{4\gamma_1} \int_{\hat{\xi} \in L} \bar{k}_{11}(\mathbf{x}, \hat{\xi}) \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL, \quad \forall \mathbf{x}_1 \in E_1; \quad (11)$$

$$\hat{V}_2(\mathbf{x}_2) = \frac{1}{4\gamma_1} \int_{\hat{\xi} \in L} \bar{k}_{12}(\mathbf{x}, \hat{\xi}) \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL, \quad \forall \mathbf{x}_2 \in E_2. \quad (12)$$

Ahora, dado que la densidad de corriente que emana no es realmente uniforme en la sección transversal, la condición de contorno  $V_1(\mathbf{x}) = 1, \forall \mathbf{x} \in \Gamma$  no se satisface estrictamente y la forma variacional (10) no se verifica en todos los puntos. No obstante, si se restringe la clase de funciones de test a aquellas con uniformidad circunferencial, la expresión (10) resulta de la forma:

$$\frac{1}{4\gamma_1} \int_{\hat{\chi} \in L} \phi(\hat{\chi}) \hat{w}(\hat{\chi}) \left[ \int_{\hat{\xi} \in L} \phi(\hat{\xi}) \bar{k}_{11}(\hat{\chi}, \hat{\xi}) \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL \right] dL = \int_{\hat{\chi} \in L} \phi(\hat{\chi}) \hat{w}(\hat{\chi}) dL, \quad (13)$$

que debe satisfacerse para todo miembro  $\hat{w}(\hat{\chi})$  de una clase adecuada de funciones de test en  $L$ , siendo  $\bar{k}_{11}(\hat{\chi}, \hat{\xi})$  el promedio del núcleo  $k_{11}(\hat{\chi}, \hat{\xi})$  de (6) en las secciones transversales en los puntos  $\hat{\chi}$  y  $\hat{\xi}$  [5].

En este punto, dados un conjunto de elementos de contorno 1D y uno de funciones de prueba definidas en  $L$ , es posible discretizar el conjunto de los ejes de los conductores enterrados  $L$  y la densidad de corriente aproximada  $\hat{\sigma}$ . Así, tomando un conjunto de funciones de test definidas en  $L$ , la forma variacional (13) queda finalmente reducida a un sistema de ecuaciones lineales [6,10].

La matriz de coeficientes de esta formulación 1D aproximada es también llena. Sin embargo, en general podremos garantizar una reducción drástica del coste computacional, dado que para un problema dado la actual discretización (1D) será mucho más sencilla que la previamente desarrollada (2D). Asimismo, es posible obtener expresiones simplificadas [5,6] altamente eficaces para la evaluación de los núcleos promediados  $\bar{k}_{11}(\hat{x}, \hat{\xi})$ ,  $\bar{k}_{12}(\hat{x}, \hat{\xi})$  y  $\bar{k}_{11}(\hat{\chi}, \hat{\xi})$ .

Respecto del cálculo de las integrales de línea que intervienen en la determinación de los coeficientes del sistema de ecuaciones, éste no es obvio y el coste de la integración numérica es muy elevado debido al mal condicionamiento de las funciones de

los integrandos. No obstante, si desarrollan de forma apropiada las expresiones de los coeficientes matriciales obtenidas [10] es posible reescribirlas en términos de otras expresiones, las cuales pueden ser evaluadas haciendo uso de las mismas técnicas de integración analítica derivadas por los autores para los casos de sistemas de tomas de tierra en modelos de suelo uniformes [5] y que han demostrado ser altamente eficientes, consiguiéndose reducciones muy importantes del coste computacional requerido en el análisis de casos prácticos [6].

Esta formulación de elementos de contorno se ha implementado en un sistema de cálculo y diseño asistido por ordenador de puestas a tierra de instalaciones eléctricas desarrollado por lo autores en los últimos años [12]. Es importante reseñar que el esfuerzo computacional requerido en el análisis de algunos casos puede ser muy alto, en particular en aquellas situaciones en las que las conductividades de las dos capas del terreno sean muy distintas ( $|\kappa| \approx 1$ ). Ello es debido a que la velocidad de convergencia del cálculo de los núcleos promediados  $\bar{k}_{11}(\cdot, \cdot)$ ,  $\bar{k}_{12}(\cdot, \cdot)$  y  $\bar{\bar{k}}_{11}(\cdot, \cdot)$  —cuyas expresiones son muy parecidas a las de (6) y (7)— es muy lenta cuando  $|\kappa| \approx 1$ , siendo necesario evaluar un número elevado de términos para obtener resultados precisos.

## EJEMPLO DE APLICACIÓN

Esta formulación ha sido aplicada con éxito en el análisis de mallas de tomas de tierra en casos reales. El que se presenta a continuación es el sistema de puesta a tierra de la subestación E.R. Balaídos II, próxima a la ciudad de Vigo en España. Esta toma de tierra está formada por un total de 174 electrodos, de los cuales 107 conductores cilíndricos —de 11.28 mm de diámetro— constituyen una malla horizontal enterrada a una profundidad de 80 cm, y los restantes 67 son picas verticales —de 14 mm de diámetro y una longitud de 2.5 m cada una— hincadas en el terreno y soldadas a la malla de tierra. En la figura 1 se presenta la disposición de los electrodos en la malla de tierra. Asimismo, en la Tabla I se resumen las características generales de este sistema de tierras y el modelo numérico empleado en su cálculo.

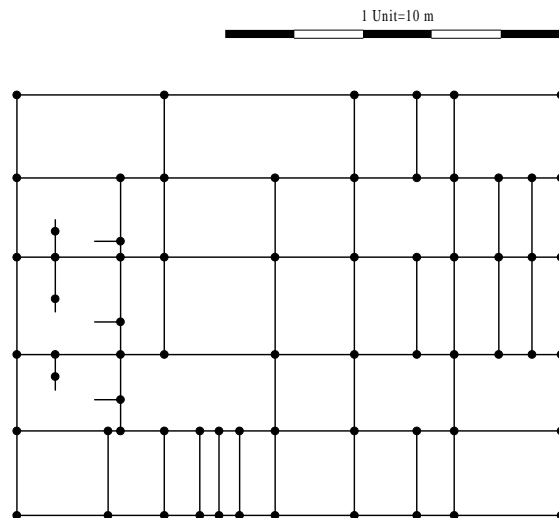
Los resultados del análisis —tales como la resistencia equivalente, la intensidad de corriente total derivada al terreno y los perfiles de potencial en la superficie del terreno a lo largo de diferentes líneas— obtenidos con esta formulación de elementos de contorno incorporando un modelo de terreno de dos capas se han comparado con los que se obtienen mediante un modelo de suelo uniforme, y se presentan en la Figura 2 y en la Tabla II.

Es de destacar que el cálculo de esta malla de tierra con el modelo de terreno de doble capa propuesto es particularmente complejo ya que, dado que la longitud de las picas es superior al espesor del estrato superior de suelo, existen electrodos de la toma de tierra tanto en la capa superior como en la inferior. En estos casos, la implementación de la formulación numérica en el sistema de diseño asistido por ordenador debe realizarse de forma muy cuidadosa para combinar adecuadamente las expresiones resultantes del análisis de las dos situaciones de los electrodos de tierra en el terreno.

Como puede comprobarse, los resultados obtenidos con los dos modelos de terreno (Tabla II y figura 2) son notablemente diferentes, por lo que los parámetros de diseño del sistema de tomas de tierra —y que se calculan a partir de éstos— pueden variar significativamente. En consecuencia, en aquellas situaciones en las que se observen cambios importantes de la conductividad del terreno con la profundidad en las inmediaciones del emplazamiento de la malla de conductores de tierra será imprescindible realizar el análisis mediante esta nueva técnica de elementos de contorno.

**Tabla I.**—E.R. Balaídos II: Características de la toma de tierra y Modelo numérico

Datos	Modelo: Elementos Contorno 1D
Sobretensión de Tierra : 10 kV	Tipo de Formulación : Galerkin
Profundidad Malla de Tierra : 0.8 m	Tipo de Elemento : Lineal
Número Electrodo Malla : 107	Número de Elementos : 241
Número de Picas Verticales : 67	Número Grados de Libertad : 208
Longitud de las Picas : 2.5 m	
Diámetro Electrodo : 11.28 mm	
Diámetro Picas : 14.00 mm	



**Fig. 1.**—E.R. Balaídos II: Vista en planta de la malla de tierra. (Se indica con puntos negros la situación de las picas).

## CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una formulación basada en el método de elementos de contorno para el análisis de sistemas de tomas de tierra de subestaciones eléctricas enterradas en terrenos estratificados. Esta formulación ha sido aplicada al caso concreto de una malla en un terreno de dos capas. La introducción de una serie de hipótesis razonables, atendiendo a las características de estas instalaciones de puesta a tierra en la práctica, ha permitido reducir la formulación general 2D en una aproximada 1D, más asequible desde el punto de vista del coste computacional. La integración de las expresiones obtenidas con esta formulación numérica para modelos de terreno de dos capas puede realizarse mediante el mismo esquema de integración analítica desarrollado recientemente por los autores para el caso de mallas de tierra en suelos uniformes, obteniéndose resultados de gran precisión en el análisis de problemas reales.

Actualmente, el cálculo de grandes instalaciones requiere todavía un importante esfuerzo computacional en algunos casos, debido al elevado número de términos de los núcleos integrales que es preciso evaluar con el fin de obtener resultados precisos. No obstante, la aplicación de nuevas técnicas que están siendo desarrolladas por los autores, permitirán acelerar la velocidad de convergencia y reducir el actual coste computacional.



## AGRADECIMIENTOS

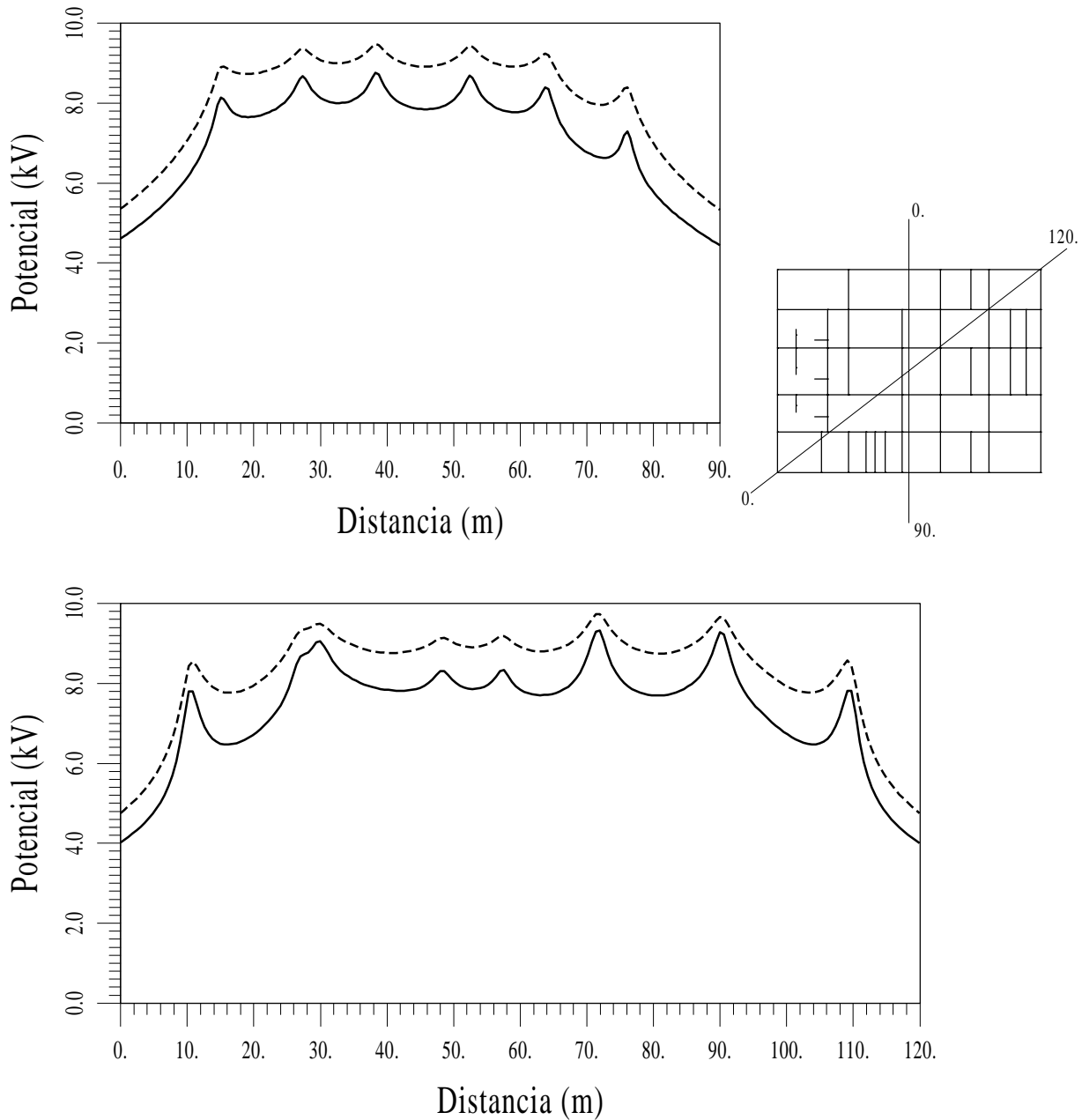
Este trabajo ha sido parcialmente financiado por las empresas eléctricas “Unión Fenosa” y “Fecsa”, por la Universidad de La Coruña y por el gobierno autónomo de la Xunta de Galicia mediante proyectos y becas de investigación.

## REFERENCIAS

- [1] **Sverak J.G., Dick W.K., Dodds T.H. y Heppe R.H.**, *Safe Substations Grounding. Part I*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 100, 4281–4290, (1981).
- [2] **Heppe R.J.**, *Computation of potential at surface above an energized grid or other electrode, allowing for non-uniform current distribution*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 98, No. 12, 1978–1988, (1979).
- [3] **Garret D.L. y Pruitt J.G.**, *Problems Encountered with the APM of Analyzing Substation Grounding Systems*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 104, No. 12, 4006–4023, (1985).
- [4] **Navarrina F., Colominas I. y Casteleiro M.**, *Analytical Integration Techniques for Earthing Grid Computation by BEM*, Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences, 1197–1206, CIMNE Pub., Barcelona, (1992).
- [5] **Colominas I.**, *Cálculo y Diseño por Ordenador de Tomas de Tierra en Instalaciones Eléctricas: Una Formulación Numérica basada en el Método Integral de Elementos de Contorno*, Ph.D.Thesis, ETSICCP, Universidad de La Coruña, (1995).
- [6] **Colominas I., Navarrina F. y Casteleiro M.**, *Una Formulación Numérica General para el Cálculo y Diseño de Tomas de Tierra en Grandes Instalaciones Eléctricas*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 13, No. 3, 383–401, (1997).
- [7] **Durand E.**, *Électrostatique*, Masson Ed., Paris, (1966).
- [8] **ANSI/IEEE Std.80**, *Guide for Safety in AC Substation Grounding*, IEEE Inc., New York, (1986).
- [9] **Tagg G.F.**, *Earth Resistances*, Pitman Pub. Co., New York, (1964).
- [10] **Aneiros J.M.**, *Una Formulación Numérica para Cálculo y Diseño de Tomas de Tierra de Subestaciones Eléctricas con Modelos de Terreno de Dos Capas*, Research Report, ETSICCP, Universidad de La Coruña, (1996).
- [11] **Sunde E.D.**, *Earth conduction effects in transmission systems*, McMillan Ed., New York, (1968).
- [12] **Casteleiro M., Hernández L.A., Colominas I. y Navarrina F.**, *Memoria y Manual de Usuario del Sistema TOTBEM para Cálculo y Diseño Asistido por Ordenador de Tomas de Tierra de Instalaciones Eléctricas*, ETSICCP, Universidad de La Coruña, (1994).

**Tabla II.**—E.R. Balaídos II: Modelos de terreno utilizados y Resultados obtenidos

Modelo de Terreno de Dos Capas	Modelo de Terreno Uniforme
Resistividad Capa Superior : 200 $\Omega$ m	—
Resistividad Capa Inferior : 60 $\Omega$ m	—
Espesor Capa Superior : 1.2 m	Resistividad Terreno : 60 $\Omega$ m
Intensidad Total de Tierra : 21.14 kA	Intensidad Total de Tierra : 24.94 kA
Resistencia Equivalente : 0.473 $\Omega$	Resistencia Equivalente : 0.401 $\Omega$
Tiempo CPU (VAX 4300): 55.5 min.	Tiempo CPU (VAX 4300): 1.9 min.



**Fig. 2.**—E.R. Balaídos II : Perfiles de Potencial en la superficie del terreno a lo largo de las diferentes líneas indicadas. (En trazo continuo se representan los resultados obtenidos con el modelo de terreno de dos capas, y con trazo discontinuo los del modelo uniforme).