

Preprint of the paper

"Una formulación general de elementos de contorno para el Diseño Asistido por Ordenador de Tomas de Tierra en Subestaciones Eléctricas"

I. Colominas, F. Navarrina, M. Casteleiro (1996)

En "Métodos Numéricos en Ingeniería", Sección: "Métodos de Contorno", pp. 1441--1451; M. Doblaré, J.M. Correas, E. Alarcón, L. Gavete y M. Pastor (Editores); Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería SEMNI, Barcelona (ISBN: 84-87867-71-5)

<http://caminos.udc.es/gmni>

UNA FORMULACIÓN GENERAL DE ELEMENTOS DE CONTORNO PARA EL DISEÑO ASISTIDO POR ORDENADOR DE TOMAS DE TIERRA EN SUBESTACIONES ELÉCTRICAS

I. Colominas, F. Navarrina y M. Casteleiro

*Dpto. de Métodos Matemáticos y Representación
E. T. S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad de La Coruña
Campus de Elviña S/N, 15192— La Coruña, ESPAÑA*

RESUMEN

La puesta a tierra de una instalación eléctrica es imprescindible para garantizar su seguridad cuando tienen lugar situaciones de fallo. Para su correcto diseño se requiere la determinación de una serie de magnitudes tales como el cálculo de la resistencia equivalente de la toma de tierra y la distribución del potencial originado en la superficie del terreno como consecuencia de una derivación de corriente al mismo [1]. Tradicionalmente, los estudios sobre el cálculo de tomas de tierra se han planteado con el fin de obtener fórmulas sencillas y rápidas (a partir de mediciones experimentales en modelos de laboratorio o como resultado de la experiencia acumulada por los técnicos y profesionales que han trabajado en su proyecto y diseño) que permitan la estimación de estos parámetros característicos. Desde mediados de los años setenta se han desarrollado nuevos métodos basados en técnicas de cálculo matricial que intentan ponderar el efecto de los segmentos en que se subdividen los electrodos de la toma de tierra, a partir de algunas hipótesis básicas y simplificaciones poco justificadas, cuando no cuestionables [1,2].

A pesar del importante avance que han representado estas técnicas, se han puesto de manifiesto algunas anomalías notables en su aplicación práctica, tales como sus elevados requerimientos computacionales, los resultados poco realistas que se obtienen al aumentar la segmentación de los conductores, y la incertidumbre en su margen de error [3].

En este artículo se presenta una formulación general basada en el método de elementos de contorno para el cálculo y diseño asistido por ordenador de tomas de tierra, aplicable a un amplio rango de instalaciones eléctricas reales. Esta formulación que incluye como casos particulares a los métodos intuitivos más ampliamente utilizados en la actualidad, permite obtener resultados de gran precisión y fiabilidad con unos costes computacionales muy asequibles. Finalmente se presenta un ejemplo de aplicación de la formulación a una malla de toma de tierra de una subestación eléctrica que evidencia la viabilidad y eficacia de la técnica desarrollada.

1. INTRODUCCIÓN

El problema 3D asociado a la disipación de corriente eléctrica en un terreno se puede modelizar mediante la teoría del electromagnetismo de Maxwell [4]. Así, si se limita el estudio a la obtención de la respuesta electrocinética en estado

estacionario y se desprecia la resistencia eléctrica de la malla de electrodos de tierra, las ecuaciones que rigen el fenómeno físico de la derivación de corriente pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -\boldsymbol{\gamma} \text{ grad } V, & \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) &= 0 \quad \text{en } E, \\ \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}_E &= 0 \quad \text{en } \Gamma_E, & V &= V_\Gamma \quad \text{en } \Gamma, & V &\longrightarrow 0 \quad \text{si } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

siendo E el terreno, $\boldsymbol{\gamma}$ su tensor de conductividad, Γ_E la superficie del terreno, \mathbf{n}_E su versor normal exterior y Γ la superficie de los electrodos [6,9]. Las soluciones de este problema son el potencial V y la densidad de corriente $\boldsymbol{\sigma}$ en un punto arbitrario \mathbf{x} cuando la toma de tierra adquiere un potencial V_Γ , que en lo sucesivo se considerará unitario sin pérdida de generalidad. Por otra parte, siendo \mathbf{n} el versor normal exterior a Γ , la densidad de corriente de pérdida σ que emana de un punto arbitrario de la superficie de los electrodos, la intensidad total de corriente que emana de la toma de tierra I_Γ y la resistencia equivalente del sistema electrodo-terreno R_{eq} pueden escribirse como

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{n}, \quad I_\Gamma = \int \int_\Gamma \sigma \, d\Gamma, \quad R_{eq} = \frac{V_\Gamma}{I_\Gamma}. \quad (2)$$

En la práctica, la hipótesis de terreno homogéneo e isótropo se puede considerar aceptable [2], por lo que el tensor $\boldsymbol{\gamma}$ se puede sustituir por una conductividad escalar aparente γ que se determina experimentalmente. Si se considera además que la superficie del terreno es horizontal, el problema (1) se reduce a un Problema Exterior de Dirichlet [2,9].

La particular geometría de las tomas de tierra en la mayoría de las instalaciones eléctricas —mallas de conductores cilíndricos interconectados, enterrados horizontalmente o bien clavados verticalmente, cuya relación diámetro/longitud es relativamente pequeña ($\sim 10^{-3}$)— imposibilita en la práctica la obtención de soluciones analíticas a este tipo de problemas. Por otra parte, el empleo de técnicas numéricas estándar (Elementos Finitos o Diferencias Finitas) requiere la discretización del dominio E , lo que implica unas necesidades computacionales prohibitivas.

Sin embargo, dado que en el diseño de una toma de tierra el cálculo del potencial tan sólo es preciso en la superficie del terreno Γ_E y la resistencia equivalente se obtiene fácilmente a partir de la densidad de corriente de pérdida σ (2), se ha optado por desarrollar una formulación basada en el Método de Elementos de Contorno que requiere solamente la discretización de la superficie de los electrodos Γ .

2. PLANTEAMIENTO VARIACIONAL DEL PROBLEMA

A partir de los resultados que proporciona la Teoría del Potencial [5] aplicados al problema (1), el potencial V en E se puede expresar en forma integral en términos de la densidad de corriente de pérdida σ

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\boldsymbol{\xi} \in \Gamma} k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \sigma(\boldsymbol{\xi}) \, d\Gamma, \quad (3)$$

$$k(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})} + \frac{1}{r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}') } \right), \quad r(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|, \quad (4)$$

donde $\boldsymbol{\xi}'$ es el punto simétrico de $\boldsymbol{\xi}$ con respecto a la superficie del terreno [6,9].

Dado que (3) se verifica también en Γ [6,9], la condición $V_\Gamma = 1$ conduce a una ecuación integral de Fredholm de primera especie con el núcleo cuasi-singular (4), cuya solución es la densidad de corriente de pérdida σ . Por otra parte, debe satisfacerse la forma variacional

$$\int \int_{\boldsymbol{\chi} \in \Gamma} w(\boldsymbol{\chi}) (V(\boldsymbol{\chi}) - 1) d\Gamma = 0, \quad (5)$$

para todo miembro $w(\boldsymbol{\chi})$ de una clase adecuada de funciones de test en Γ .

Con el fin de resolver numéricamente este problema, dados un conjunto de funciones de prueba definidas en Γ y de elementos 2D de contorno, es posible discretizar la densidad de corriente de pérdida σ y la superficie de la toma de tierra Γ . A partir de este punto, dado un conjunto de funciones de test definidas en Γ , la forma variacional (5) conduce a un sistema de ecuaciones lineales, cuya matriz de coeficientes es llena y en la que el cálculo de cada término requiere integrar dos veces en un dominio 2D. Dado el extraordinario coste computacional que implicaría la aplicación de esta formulación en problemas reales, se hace necesario introducir alguna simplificación adicional [6,9].

3. FORMULACIÓN EN ELEMENTOS 1D DE CONTORNO

Con este objetivo, y teniendo en cuenta la geometría real de las tomas de tierra en la práctica, es posible considerar que la densidad de corriente que emana de la sección transversal de un electrodo cilíndrico es constante [6,9]. Esta hipótesis de uniformidad circunferencial es ampliamente aceptada en la mayor parte de los estudios recogidos en la bibliografía [1,3].

Así, si se denomina L al conjunto completo de los ejes de los conductores enterrados, $\hat{\boldsymbol{\xi}} \in L$ a la proyección ortogonal sobre el eje de un punto genérico $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$, $\phi(\hat{\boldsymbol{\xi}})$ al diámetro del conductor y $\hat{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\xi}})$ a la densidad de corriente aproximada que emana en esa sección transversal (asumida uniforme), se puede obtener una expresión aproximada del potencial (3) de la forma:

$$\hat{V}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\gamma} \int_{\hat{\boldsymbol{\xi}} \in L} \phi(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \bar{k}(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) \hat{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) dL, \quad (6)$$

siendo $\bar{k}(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}})$ el promedio del núcleo (4) en la sección transversal en $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ [6,9].

Debido a que la densidad de corriente que emana no es realmente uniforme en la sección transversal, la forma variacional (5) ahora no se verifica en todos los puntos. No obstante, si se restringe la clase de funciones de test a aquellas con uniformidad circunferencial, se obtiene que para todo miembro $\hat{w}(\hat{\boldsymbol{\chi}})$ de una clase adecuada de funciones de test en L , debe verificarse

$$\frac{1}{4\gamma} \int_{\hat{\boldsymbol{\chi}} \in L} \phi(\hat{\boldsymbol{\chi}}) \hat{w}(\hat{\boldsymbol{\chi}}) \left[\int_{\hat{\boldsymbol{\xi}} \in L} \phi(\hat{\boldsymbol{\xi}}) \bar{k}(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) \hat{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) dL \right] dL = \int_{\hat{\boldsymbol{\chi}} \in L} \phi(\hat{\boldsymbol{\chi}}) \hat{w}(\hat{\boldsymbol{\chi}}) dL, \quad (7)$$

siendo $\bar{k}(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}})$ el promedio de (4) en las secciones transversales en $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ y $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ [6, 9].

A partir de este punto, dado un conjunto adecuadamente elegido de n funciones de prueba $\{\hat{N}_i(\hat{\boldsymbol{\xi}})\}$ definidas en L y de m elementos 1D de contorno $\{L^\alpha\}$, es posible discretizar la densidad de corriente incógnita $\hat{\sigma}$ y el conjunto de ejes de los conductores L . Además, dado un conjunto adecuado de funciones de

test definidas en L , la forma variacional (7) conduce a un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es también llena, pero en la que el cálculo de cada término requiere ahora integrar dos veces en un dominio 1D simplemente [6]. Con el fin de aprovechar al máximo esta circunstancia, conviene efectuar de forma aproximada la evaluación del núcleo promediado $\bar{k}(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}})$ (que en principio implicaría una integración doble para cada par de puntos $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ y $\hat{\boldsymbol{\xi}}$), para lo cual se introducen sencillas simplificaciones [6,9].

La selección de diferentes tipos de funciones de prueba y de test en esta formulación simplificada de elementos de contorno conduce a diferentes formulaciones específicas. Las más simples se pueden identificar con los métodos antiguos ampliamente utilizados basados en ideas intuitivas, tales como la superposición de fuentes puntuales de corriente y de promediado del error. Así, para elementos de densidad de corriente constante, la formulación de Galekin se identifica con el Método de Promediado del Potencial (APM) [1,3]. En lo sucesivo se considerarán exclusivamente formulaciones de tipo Galerkin, en las que la matriz de coeficientes del sistema es simétrica y definida positiva [8].

El cálculo de las integrales de línea que intervienen en los coeficientes resultantes de la discretización del potencial aproximado (6) y de la forma variacional (7) no es obvio. Además, debido al mal comportamiento de las funciones subintegrando, tampoco es posible utilizar cuadraturas numéricas por el extraordinario coste computacional que involucran en este caso [6]. Por esta razón, es imprescindible derivar fórmulas explícitas para evaluar analíticamente dichos coeficientes [7,9].

4. INTEGRACIÓN ANALÍTICA DE LOS COEFICIENTES

La discretización del potencial aproximado (6) es de la forma

$$\hat{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \hat{\sigma}_i \hat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}), \quad \hat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\phi^\alpha}{4\gamma} \int_{\hat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) \hat{N}_i(\hat{\boldsymbol{\xi}}) dL, \quad (8)$$

siendo $\hat{V}_i^\alpha(\mathbf{x})$ la contribución de la función de prueba i -ésima al potencial generado por el elemento recto L^α en un punto \mathbf{x} del terreno, $\hat{\sigma}_i$ los coeficientes de la discretización de la densidad de corriente aproximada ($\hat{\sigma}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i \hat{N}_i(\hat{\boldsymbol{\xi}})$), y ϕ^α el diámetro del electrodo cilíndrico que se asume constante en cada elemento [9]. El núcleo de integración $\hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}})$ es la aproximación al núcleo promediado $\bar{k}(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}})$ y viene dado por

$$\hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \left(\frac{1}{\hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}})} + \frac{1}{\hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}')} \right), \quad \hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{|\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\xi}}|^2 + (\phi^\alpha/2)^2} \quad (9)$$

siendo $\hat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha$ y $\hat{\boldsymbol{\xi}}'$ su simétrico respecto a la superficie del terreno [9].

Por otra parte, la discretización en elementos 1D de contorno del problema [6,9], conduce a un sistema lineal cuyos coeficientes son

$$\hat{R}_{ji} = \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m \hat{R}_{ji}^{\beta\alpha}, \quad \hat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{\pi\phi^\alpha\phi^\beta}{4\gamma} \left\{ \int_{\hat{\boldsymbol{\chi}} \in L^\beta} \hat{N}_j(\hat{\boldsymbol{\chi}}) \left[\int_{\hat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha} \hat{k}(\hat{\boldsymbol{\chi}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}) \hat{N}_i(\hat{\boldsymbol{\xi}}) dL \right] dL \right\} \quad (10)$$

donde $\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha}$ es la contribución de la función de prueba i -ésima al potencial generado por el elemento L^α sobre otro elemento L^β de diámetro ϕ^β , promediado por la función de test j -ésima. El núcleo $\widehat{\bar{k}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})$ que corresponde a la aproximación del núcleo promediado $\bar{k}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})$ [9], viene dado por

$$\widehat{\bar{k}}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \left(\frac{1}{\widehat{r}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}})} + \frac{1}{\widehat{r}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}')} \right), \quad \widehat{r}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}) = \sqrt{|\widehat{\boldsymbol{\chi}} - \widehat{\boldsymbol{\xi}}|^2 + (\phi^\alpha/2)^2 + (\phi^\beta/2)^2} \quad (11)$$

4.1. Cálculo de los coeficientes del potencial $\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x})$

Todo punto $\widehat{\boldsymbol{\xi}} \in L^\alpha$ se puede expresar en términos del punto medio $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_0$ del elemento L^α , de su longitud \mathcal{L}^α y de su versor director $\widehat{\mathbf{s}}^\alpha$, para un valor de un parámetro escalar ξ comprendido entre -1 y 1 (dominio de las funciones de prueba isoparamétricas) [7]. De este modo, la expresión (8) se puede reescribir como la integral de línea en la variable ξ

$$\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\phi^\alpha \mathcal{L}^\alpha}{8\gamma} \int_{\xi=-1}^{\xi=1} \widehat{k}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi)) \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi)) d\xi. \quad (12)$$

Así mismo, el núcleo integral $\widehat{k}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))$ se puede expresar en función de la variable escalar ξ , dado que depende de términos (9) que son de la forma $\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))$. Así, si se denomina p_0 a la distancia del punto \mathbf{x} a su proyección ortogonal sobre la dirección del electrodo y q a la distancia desde dicha proyección al punto medio $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_0$, la distancia $\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))$ resulta

$$\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi)) = \frac{\mathcal{L}^\alpha}{2} \sqrt{\widehat{p}^2 + (\widehat{q} - \xi)^2}, \quad \widehat{p}^2 = \left(\frac{p_0}{\mathcal{L}^\alpha/2} \right)^2 + \left(\frac{\phi^\alpha}{\mathcal{L}^\alpha} \right)^2, \quad \widehat{q} = \frac{q}{\mathcal{L}^\alpha/2} \quad (13)$$

Obviamente este análisis puede efectuarse también con el término $\widehat{r}(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}'(\xi))$ de (9), obteniéndose expresiones análogas a las anteriores en función de nuevos parámetros geométricos \widehat{p}' y \widehat{q}' correspondientes a los puntos $(\mathbf{x}, \widehat{\boldsymbol{\xi}}')$ [9].

En lo referente a las funciones de prueba $\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))$ de (12), éstas se pueden expresar, efectuando su desarrollo en serie de potencias hasta el término de segundo grado, como funciones parabólicas en la variable ξ cuyos coeficientes dependen de valores conocidos de las funciones y sus derivadas primeras y segundas [7,9].

Finalmente, si se sustituyen en (12) las expresiones obtenidas en (13) del núcleo integral (9) y las de las funciones de prueba $\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))$ teniendo en cuenta que ambas dependen de la variable ξ , es posible integrar explícitamente el coeficiente del potencial $\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x})$ [9]. Tras un relativamente largo desarrollo analítico, se obtiene

$$\widehat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{\phi^\alpha}{4\gamma} [\Phi(\widehat{p}, \widehat{q}) + \Phi(\widehat{p}', \widehat{q}')] \quad (14)$$

donde la función $\Phi(\widehat{p}, \widehat{q})$ depende exclusivamente de los parámetros geométricos \widehat{p}, \widehat{q} y de los coeficientes de las funciones de prueba conocidos [9].

4.2. Cálculo de los coeficientes del sistema de ecuaciones $\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha}$

De forma análoga al desarrollo presentado en 4.1, un punto cualquiera $\widehat{\mathbf{x}} \in L^\beta$ se puede expresar en términos del punto medio $\widehat{\mathbf{x}}_0$ del elemento L^β , de su longitud \mathcal{L}^β y de su versor director $\widehat{\mathbf{s}}^\beta$, para un valor de un parámetro escalar χ comprendido entre -1 y 1 (dominio de las funciones de prueba isoparamétricas) [7]. De este modo, y teniendo en cuenta el desarrollo realizado en (12), la expresión (10) se puede reescribir como dos integrales de línea, una en la variable escalar ξ y otra en χ ,

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{\pi \phi^\alpha \phi^\beta \mathcal{L}^\alpha \mathcal{L}^\beta}{16\gamma} \left\{ \int_{\chi=-1}^{\chi=1} \widehat{N}_j(\widehat{\mathbf{x}}(\chi)) \left[\int_{\xi=-1}^{\xi=1} \widehat{k}(\widehat{\mathbf{x}}(\chi), \widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi)) \widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi)) d\xi \right] d\chi \right\} \quad (15)$$

Como puede observarse, la integral de línea en la variable escalar ξ es similar a la calculada analíticamente en 4.1, aunque en este caso el núcleo integral viene dado por (11). Si se redefinen convenientemente los parámetros geométricos $\widehat{p}(\widehat{\mathbf{x}}(\chi))$ y $\widehat{q}(\widehat{\mathbf{x}}(\chi))$, la expresión (15) se puede reescribir [9], haciendo uso de (14), en la forma

$$\widehat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{\pi \phi^\alpha \phi^\beta \mathcal{L}^\beta}{8\gamma} \left\{ \widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2) + \widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}'_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}'_2, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2) \right\} \quad (16)$$

$$\widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2) = \int_{\chi=-1}^{\chi=1} \widehat{N}_j(\widehat{\mathbf{x}}(\chi)) [\Phi(\widehat{p}(\widehat{\mathbf{x}}(\chi)), \widehat{q}(\widehat{\mathbf{x}}(\chi)))] d\chi \quad (17)$$

$$\widehat{p}^2(\widehat{\mathbf{x}}(\chi)) = \left(\frac{p_0(\widehat{\mathbf{x}}(\chi))}{\mathcal{L}^\alpha/2} \right)^2 + \left(\frac{\phi^\alpha}{\mathcal{L}^\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\phi^\beta}{\mathcal{L}^\alpha} \right)^2, \quad \widehat{q}(\widehat{\mathbf{x}}(\chi)) = \frac{q(\widehat{\mathbf{x}}(\chi))}{\mathcal{L}^\alpha/2} \quad (18)$$

Por otra parte, al igual que en el caso de $\widehat{N}_i(\widehat{\boldsymbol{\xi}}(\xi))$ en la ecuación del potencial (12), las funciones $\widehat{N}_j(\widehat{\mathbf{x}}(\chi))$ se pueden expresar, desarrollando en serie de potencias hasta el término de segundo grado, como funciones parabólicas en la variable escalar χ cuyos coeficientes son conocidos. La sustitución de estas funciones de prueba en (17) conducen finalmente a una integral de línea en la variable χ [9].

(a) Integración de los coeficientes $\widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2)$

Cada uno de los coeficientes $\widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2)$ de (17) se puede interpretar como la influencia del potencial generado por una barra sobre otra, ambas definidas por las coordenadas cartesianas de los puntos extremos de sus ejes. De este modo, puede analizarse el primero de los sumandos de (16), y considerar el segundo como la integración entre dos barras con coordenadas distintas (las de los puntos simétricos a $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1$ y $\widehat{\boldsymbol{\xi}}_2$) y a la que se aplicarán los mismos resultados.

En consecuencia, la integración de los coeficientes (17) requiere en primer lugar efectuar el análisis geométrico de dos barras en el espacio, que permita expresar las distancias adimensionales $\widehat{p}(\widehat{\mathbf{x}}(\chi))$ y $\widehat{q}(\widehat{\mathbf{x}}(\chi))$ de (18) en función de la variable escalar χ y de una serie de parámetros geométricos conocidos a partir

de las posiciones relativas entre las dos rectas [7,9]. Si se sustituyen en (17) las expresiones de $\widehat{p}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\chi))$ y $\widehat{q}(\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\chi))$ que se derivan de este análisis y las obtenidas de las funciones de prueba $\widehat{N}_j(\widehat{\boldsymbol{\chi}}(\chi))$, y se reordenan los términos adecuadamente [9], resulta

$$\widehat{\mathcal{R}}_{ji}^{\beta\alpha}(\widehat{\boldsymbol{\xi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\xi}}_2, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_1, \widehat{\boldsymbol{\chi}}_2) = \sum_{u=0}^{u=2} \sum_{w=0}^{w=4} \mathcal{K}_w^{(u)} \varphi_w^{(u)}, \quad (19)$$

donde los coeficientes $\mathcal{K}_w^{(u)}$ se calculan directamente a partir de la función de prueba j -ésima, los parámetros geométricos de las posiciones relativas entre las dos rectas y la función de prueba del i -ésima [7].

Por otra parte, los coeficientes $\varphi_w^{(u)}$ de (19) contienen las integrales de línea en la variable escalar χ . La obtención de fórmulas explícitas para la evaluación de estos términos no es trivial y requiere un considerable trabajo de manipulación analítica. Esta circunstancia se ve además agravada por el hecho de que en estas expresiones intervienen también parámetros geométricos de las barras, cuyos posibles valores aumentan la casuística en los tipos distintos de integrales que hay que analizar por las singularidades que se pueden producir [9].

Por este motivo, en trabajos anteriores [7] se desarrollaron fórmulas analíticas para los casos más frecuentes de disposición de los electrodos —barras perpendiculares y paralelas—. A pesar del importante avance que ello supuso en el cálculo de grandes mallas de tomas de tierra, se requería completar el análisis de las integrales con independencia de los parámetros geométricos de modo que su evaluación fuese completamente analítica, sin necesidad de calcularlas numéricamente en algunos casos particulares.

Actualmente este desarrollo está completamente terminado y ya se dispone de fórmulas explícitas para calcular los coeficientes $\varphi_w^{(u)}$, aunque su deducción es demasiado extensa para detallarla en este artículo [9]. Estas expresiones han sido desarrolladas pensando en facilitar su posterior implementación en un programa de ordenador, por lo que se han derivado de modo que su evaluación sea recursiva, y en la medida de lo posible, efectuando el menor número de operaciones que involucren funciones trascendentes.

5. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Este modelo numérico unidimensional simplificado, basado en el método de elementos de contorno con la integración analítica de los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales, es muy estructurado y está desarrollado de forma que sea posible incorporarlo en un sistema de diseño asistido por ordenador. No obstante, la programación de esta formulación debe realizarse cuidadosamente habida cuenta de la gran complejidad de las expresiones que intervienen en el cálculo de los coeficientes matriciales y su casuística, con objeto de evitar su mal condicionamiento.

La implementación práctica de estas técnicas desarrolladas por los autores ha dado lugar al sistema TOTBEM de cálculo y diseño asistido por ordenador de tomas de tierra para subestaciones eléctricas [10], con el que es posible analizar y calcular mallas de tierra de grandes instalaciones con gran precisión y con unos requerimientos computacionales muy razonables, tanto de memoria como de tiempo de cómputo.

El ejemplo de aplicación que presentamos es la malla de electrodos de la subestación eléctrica E.R. Barberá de la compañía FECSA, cercana a Barcelona. El sistema de tomas de tierra de esta subestación está formada por 408 conductores cilíndricos rectos de diámetro constante (12.85 mm), constituyendo un entramado paralelo a la superficie del terreno enterrado a una profundidad de 80 cm que cubre una superficie de más de 6500 m². La disposición de los conductores de esta malla de puesta a tierra se muestra a escala en la figura 1. a). El área total sometida a estudio es la de un rectángulo de 135 m por 210 m, lo que supone una superficie de más de 28000 m².

SUBESTACIÓN E.R. BARBERÁ	
DATOS DEL MODELO	RESULTADOS
Número Electrodo: 408 Diámetro Electrodo: 12.85 mm Profundidad Malla: 0.8 m Resistividad Terreno: 60 Ω m Intensidad de Tierra: 30 kA	Potencial de Tierra: 9.45 kV Resistencia Equivalente: 0.315 Ω Tiempo CPU: 450 s Ordenador: PC486/16Mb/66MHz

Tabla 1.—Subestación E.R. Barberá: Datos y Resultados numéricos del sistema TOTBEM.

El modelo numérico elegido para la resolución de este problema ha consistido en una formulación de Galerkin con un elemento de contorno de densidad de corriente constante por barra, lo que supone un total de 408 grados de libertad. Por otra parte, la Intensidad de Tierra en condiciones de fallo considerada en este estudio ha sido de 30 kA (dada la relación existente entre la intensidad y el voltaje, puede darse como dato indistintamente el Potencial de Tierra V_T o la Intensidad de Tierra I_T).

Los datos y resultados numéricos se resumen en la tabla 1. La figura 1. b) muestra la distribución de los niveles de potencial en la superficie del terreno cuando tiene lugar una derivación de corriente al mismo. En la figura 1. c) se representan los valores del potencial a lo largo del perfil indicado en la figura 1. b). Finalmente, en 1. d) se muestra una representación 3D del potencial y del perfil seleccionado. Este modelo numérico de la malla de tierra de la subestación E.R. Barberá requiere en la actualidad tan sólo siete minutos y medio de CPU en un ordenador personal (tipo PC486/16Mb de 66 MHz). Como puede verse, esta formulación permite caracterizar completamente, y de un modo riguroso y fiable, una toma de tierra con unas necesidades de cómputo muy aceptables.

Este mismo ejemplo se ha calculado aumentando el número de elementos de contorno del modelo numérico, mediante la subdivisión de cada uno de los electrodos de la malla. Al nivel del conjunto de la toma de tierra, no se han apreciado diferencias significativas ni en la distribución de los potenciales en la superficie del terreno, ni en los valores de la resistencia equivalente e intensidad total de la malla, por lo que en general, no se considerará necesaria la subdivisión adicional de los conductores que forman la malla de tierra. En los casos en que desee obtener una mayor precisión en los resultados, por ejemplo para realizar cálculos más detallados en zonas concretas de la malla o determinar magnitudes tales como tensiones de paso o contacto [1,9], la estrategia más razonable es la utilización de elementos de densidad de corriente de mayor orden (lineal o parabólica) [6].

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación de elementos de contorno para el análisis de sistemas de tomas de tierra para subestaciones eléctricas. En el caso de problemas 3D, la introducción de una serie de hipótesis razonables permiten reescribir la formulación general de elementos de contorno 2D como una formulación simplificada 1D. A su vez, la incorporación de avanzadas técnicas analíticas de integración han hecho posible la drástica reducción de los requerimientos computacionales y el desarrollo de nuevas formulaciones más eficientes y precisas.

La formulación numérica que se propone constituye una metodología que —por primera vez— permite obtener resultados de gran precisión en el análisis de tomas de tierra de subestaciones eléctricas de tamaño medio-grande, prácticamente en tiempo real y utilizando un ordenador convencional de bajo coste y amplia disponibilidad. Obviamente, los requerimientos de cálculo aumentan en el caso de instalaciones de mayor tamaño, para cuyo estudio sería preciso utilizar ordenadores más potentes, aunque siempre dentro de unos límites computacionales y unos costes operativos razonables.

7. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la *Subdirección General de Producción Hidráulica, Transporte y Transformación* de UNIÓN FENOSA, la *Consellería de Educación* de la XUNTA DE GALICIA, el *Vicerrectorado de Investigación* de la UNIVERSIDAD DE LA CORUÑA y la *Unidad de Gestión Tecnológica de la Red* de FECSA.

REFERENCIAS

1. SVERAK J.G. et al. —“Safe Substations Grounding. Part I”, *IEEE Trans. on Power App. and Systems*, **100** (9), 4281–90, (1981)
2. SVERAK J.G., et al. —“Safe Substations Grounding. Part II”, *IEEE Trans. on Power App. and Systems*, **101** (10), 4006–23, (1982)
3. GARRETT D.L., PRUITT J.G. —“Problems Encountered with the Average Potential Method of Analyzing Substation Grounding Systems”, *IEEE Trans. on Power App. and Systems*, **104** (12), 3586–96, (1985)
4. DURAND E. —*Électrostatique*, Masson, Paris, 1966
5. STAKGOLD I.—*BVP of Mathematical Physics*, MacMillan, London, 1970
6. NAVARRINA F., COLOMINAS I., CASTELEIRO M. —“Una Formulación Aproximada mediante el MEC para la solución de problemas en Teoría del Potencial”, *II Cong. Mét. Num. Ing.*, SEMNI, 1566–1575, La Coruña, (1993)
7. COLOMINAS I., NAVARRINA F., CASTELEIRO M. —“Fórmulas Analíticas de Integración para el Cálculo de Tomas de Tierra mediante el MEC”, *II Cong. Mét. Num. Ing.*, SEMNI, 855–864, La Coruña, (1993)
8. JOHNSON C. —*Numerical Sol. of PDEs by FEM*, Cambridge, New York, 1987
9. COLOMINAS I. —*Cálculo y Diseño por Ordenador de Tomas de Tierra en Instalaciones Eléctricas: Una Formulación Numérica basada en el Método Integral de Elementos de Contorno*, Tesis Doctoral, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, C. y P., Universidad de La Coruña, 1995
10. CASTELEIRO M., HERNÁNDEZ L.A., COLOMINAS I., NAVARRINA F. — *Memoria y Manual de Usuario del sistema TOTBEM para cálculo y diseño asistido por ordenador de tomas de tierra de instalaciones eléctricas*, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, C. y P., Universidad de La Coruña, 1994

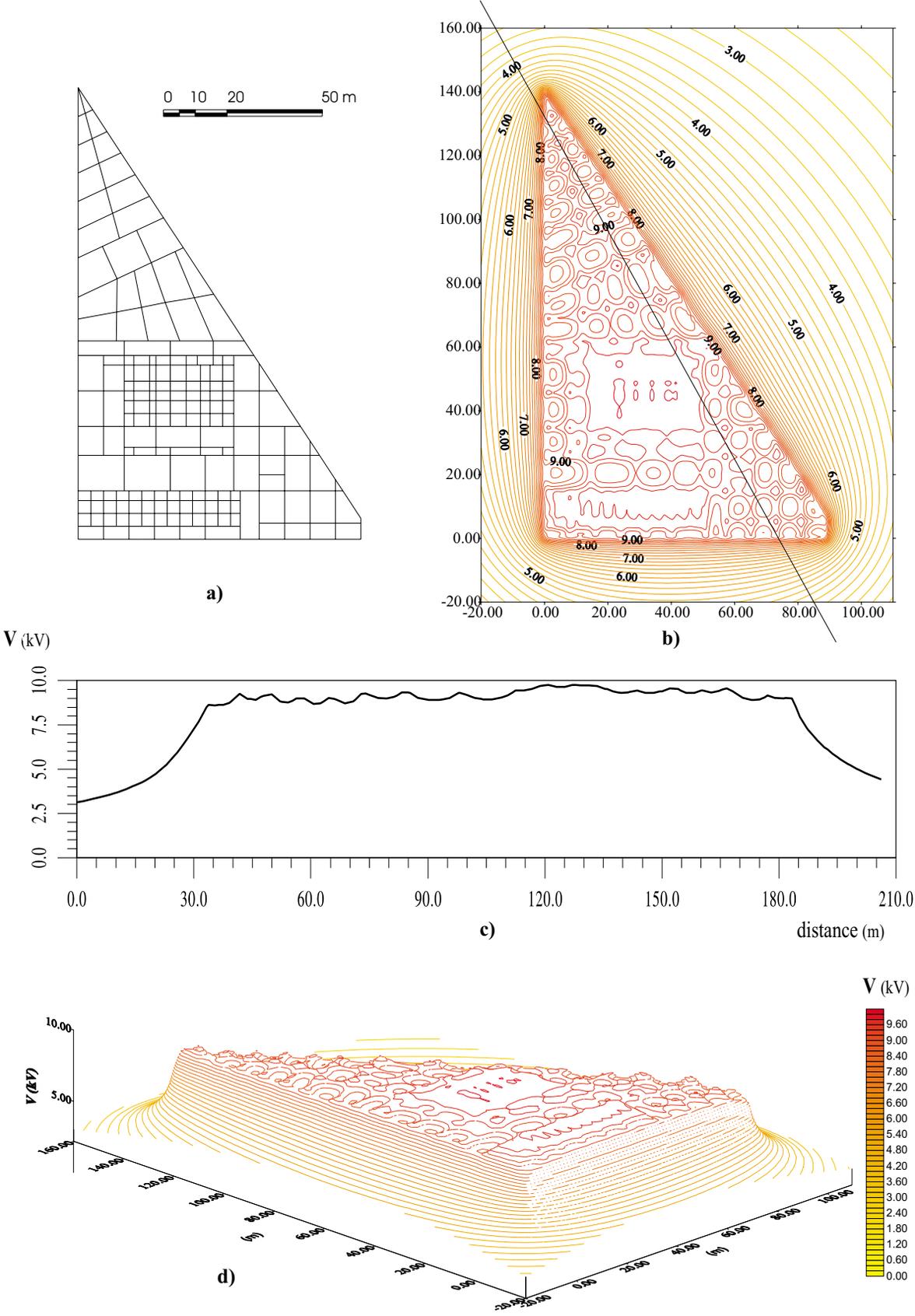


Figure 2.-- E. R. Barberá Substation: **a)** Plan of the grounding grid, **b)** Potential distribution on ground surface (kV), **c)** Potential profile along a line, **d)** 3D view of potential level on ground surface.